Conjunts numèrics

Departament de Matemàtica Aplicada III
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Núria Parés, Francesc Pozo, Yolanda Vidal

Notacions bàsiques

$\Longrightarrow$	implica	$\neq$	diferent
$\Longleftrightarrow$	si i només si	$\subset$	subconjunt, inclòs
$\forall$	per a tot	$\cup$	unió
$\exists$	existeix	$\cap$	intersecció
$\nexists$	no existeix	$\approx$	aproximadament
$!$	únic ($\exists!$)	$\sim$	equivalent
$\in$	pertany	$\propto$	proporcional
$\notin$	no pertany		

$\sum$ sumatori $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

$\prod$ producte $\displaystyle\prod_{i=1}^{4} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$

Lletres gregues

α	alfa	κ	kappa	τ	tau
β	beta	λ	lambda	ϕ, φ	fi
γ	gamma	μ	mu	χ	khi
δ	delta	ν	nu	ψ	psi
ϵ, ε	èpsilon	ξ	csi	ω	omega
ζ	zeta	π	pi		
η	eta	ρ	ro		
θ	theta	σ	sigma		

Introducció al raonament matemàtic

- Què és una demostració?
- Quins tipus de demostracions s'utilitzen en matemàtiques?
- Exemples de demostracions

Raonament matemàtic

Al diccionari on-line http://www.enciclopedia.cat/ trobem la següent definició de matemàtiques:

"Ciència que estudia les propietats dels nombres, de les figures, dels conjunts, de les operacions, de les funcions, etc..."

ex. *Per exemple, el Teorema de Pitàgores ens diu que si tenim un triangle rectangle de costats a i b i d'hipotenusa c llavors*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Les propietats o afirmacions matemàtiques s'anomemen de manera diferent segons la seva importància.

Les propietats més importants s'anomenen **teoremes** (com el Teorema de Pitàgores), mentre que els lemes, corol·laris o proposicions, recullen propietats menys importants.

La importància dels teoremes, lemes, corol·laris o proposicions és que recullen propietats que **s'ha pogut demostrar que són certes** (seguint el mètode logicodeductiu propi de les matemàtiques).

Però, què és una **demostració matemàtica**?

Una demostració matemàtica és una **successió coherent de passos** que permet assegurar la veracitat d'un enunciat.

El punt de partida d'una demostració són un conjunt d'enunciats que es consideren veritables i s'anomenen **premisses**. Aquestes premisses poden ser hipòtesis, axiomes o altres proposicions o teoremes demostrats anteriorment.

Considerant les premisses com a certes, cal arribar a l'enunciat original mitjançant l'**aplicació d'unes determinades regles lògiques o aplicant propietats prèviament demostrades**.

És senzill fer una demostració matemàtica?

En general, demostrar una propietat matemàtica pot ser molt complex.

Les preguntes claus que ens hem de fer són: per on començo? quins passos he de seguir?

És a dir, la dificultat està en saber escollir bé les premisses i després saber quins raonaments lògics cal seguir per arribar a l'enunciat original.

Durant aquest curs, repassarem conceptes bàsics d'àlgebra i càlcul que ja heu vist amb anterioritat, aprofundint en els raonaments i demostracions.

Encara que en general no existeix un procediment únic de demostració de teoremes, sí que hi ha diferents **procediments de demostracions** que són utilitzats usualment en matemàtiques.

Els quatre tipus de raonaments bàsics són:

- **Demostració directa**.
- **Demostració per contrarecíproc**.
- **Demostració per contradicció** (o reducció a l'absurd).
- **Demostració per inducció**.

A continuació veurem diversos exemples de demostracions senzilles obtingudes a partir d'aquests quatre mètodes.

Suposem que volem demostrar que un enunciat és cert. A aquest enunciat l'anomenarem Q.

Per exemple, imaginem que volem demostrar que si a i b són dos nombres reals, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Per demostrar Q generalment necessitarem partir d'unes premisses i d'unes regles lògiques. A aquestes propietats les anomenarem P.

En el cas de veure que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, *les premisses seran poder aplicar les propietats de la suma i del producte dels nombres reals.*

El fet de demostrar Q a partir de P, es denota per

$$\boxed{P \Rightarrow Q} \qquad (P \text{ implica } Q)$$

Recordem que Q és el que volem demostrar i que P és el que pressuposem cert, *les regles del joc*.

Igual que en els escacs on cada fitxa té un moviment permès, en una demostració matemàtica no tots els passos són permesos. Només podem fer servir propietats demostrades anteriorment, (les propietats que estan incloses en P).

Demostració directa

En una demostració directa, suposem P cert i mitjançant una successió coherent de passos demostrem que Q és cert.

ex. Fórmula del quadrat d'una suma: *Volem demostrar que si a i b són dos nombres reals*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Dem: Les premisses en aquest cas són les propietats de la suma, el producte i elevar al quadrat de nombres reals que anirem aplicant pas a pas.

És imprescindible quan es fa una demostració explicar a cada pas quina propietat s'ha utilitzat.

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b) && \text{def. d'elevar al quadrat}\\
&= a\cdot(a+b) + b\cdot(a+b) && \text{prop. distributiva del } \cdot\\
&= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b && \text{prop. distrib. de la } +\\
&= a^2 + a\cdot b + b\cdot a + b^2 && \text{def. d'elevar al quadrat}\\
&= a^2 + a\cdot b + a\cdot b + b^2 && \text{prop. commutativa del } \cdot\\
&= a^2 + 2a\cdot b + b^2.
\end{aligned}$$

En els passos anteriors també hem utilitzat la propietat commutativa de la suma. □

ex. Solucions de l'equació de segon grau: *Donada l'equació de segon grau* $ax^2 + bx + c = 0$, *aleshores*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dem: La hipòtesi és que tenim una equació de segon grau, i per tant necessàriament $a \neq 0$.

A més, utilitzarem les propietats de la suma, producte i divisió de nombres reals i també les propietats bàsiques d'operar amb igualtats.

Com que $a \neq 0$, podem dividir l'equació per a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

El segon pas s'anomena completació de quadrats. La idea és convertir els termes en blau en un terme de la forma $(x + C)^2$. Observant que:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

tenim que:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Substituim aquesta igualtat en l'equació que teníem:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0.$$

Deixem a l'esquerra només els termes que porten x

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}.$$

Extreiem l'arrel quadrada en ambdós membres

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

i finalment, aïllant la incògnita, s'obté

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a^2}}.$$

Ara només ens queda un petit detall tècnic en funció del signe de a, ja que $\sqrt{a^2}=|a|$.

Suposem $a>0$, llavors

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a^2}}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{2\sqrt{b^2-4ac}}{a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Per altra banda, si $a<0$, llavors

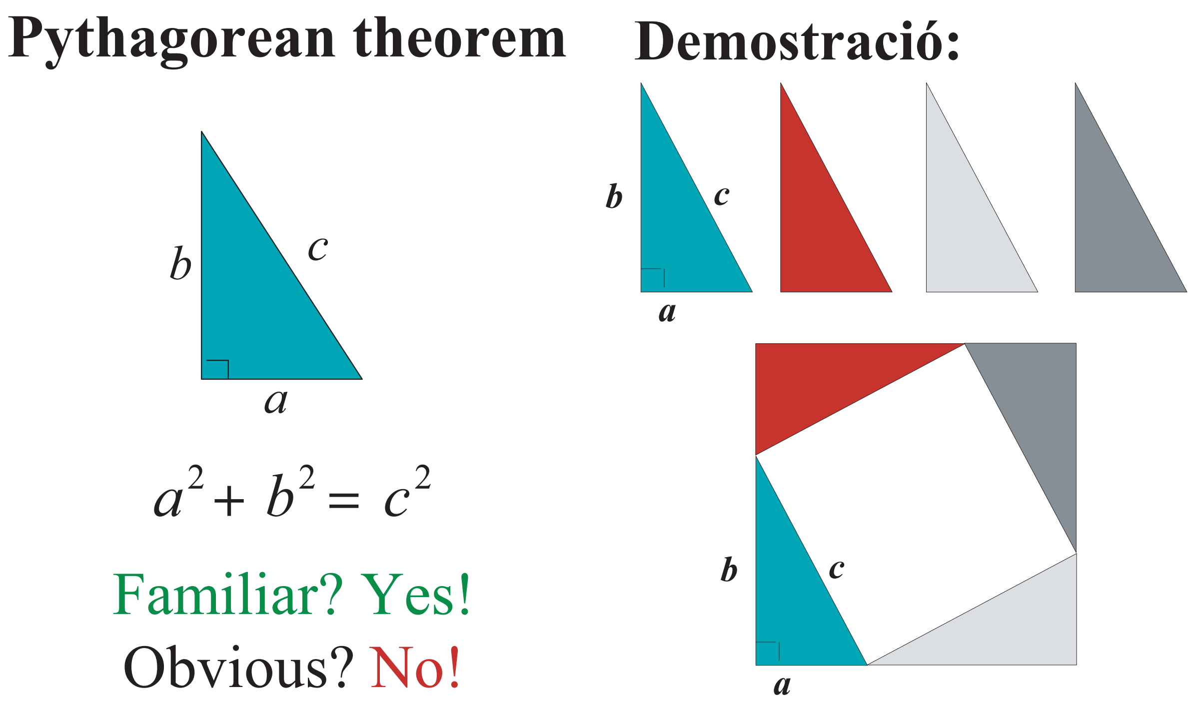
$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a^2}}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$\square$

Exercici Proposat 1. *Trobeu les dues solucions de l'equació de segon grau* $2x^2 + 5x + 6 = 0$ *sense utilitzar la fòrmula, és a dir, utilitzant la tècnica de completar quadrats.*

ex. TEOREMA DE PITÀGORES: *donat un triangle rectangle d'hipotenusa* c *i de catets* a *i* b*, llavors*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



De la figura és obvi que $(a + b)^2 = 2ab + c^2$, d'on el teorema queda provat. $\square$

Demostració per contrarecíproc

Recordem que l'objectiu és demostrar que $P \Rightarrow Q$.

En una demostració per contrarecíproc, s'utilitza la següent propietat

$$\boxed{P \Rightarrow Q} \quad \text{és equivalent a} \quad \boxed{\neg Q \Rightarrow \neg P}$$

és a dir, que és equivalent demostrar qualsevol de les dues següents afirmacions

- $\boxed{P \Rightarrow Q}$ (si suposem P cert, llavors Q és cert)
- $\boxed{\neg Q \Rightarrow \neg P}$ (no Q implica no P)
  és a dir, si suposem que Q NO és cert, llavors P tampoc ho és.

ex. *"Si un estudiant copia suspèn l'assignatura"*

Aquesta frase es pot escriure de forma lògica com $P \Rightarrow Q$. En aquest cas, la premisa P és el fet de que un estudiant copii i la conseqüència Q és suspendre l'assignatura, és a dir, copiar implica suspendre.

Aquesta frase és equivalent a:

"Si un estudiant no suspèn llavors no ha copiat"

És a dir, no suspendre implica no haver copiat.

<u>**Nota:**</u> Un teorema del tipus $P \Leftrightarrow Q$ consta de dues demostracions: 1) $P \Rightarrow Q$ 2) $Q \Rightarrow P$.

ex. *Demostreu que a és parell $\Longleftrightarrow$ a^2 és parell.*

<u>Dem:</u> Hem de demostrar les dues implicacions

1.- a és parell $\Rightarrow$ a^2 és parell

2.- a^2 és parell $\Rightarrow$ a és parell

1.- <u>Demostració directa:</u> suposem que a és parell i vegem que llavors a^2 també ho és.

a parell $\Rightarrow$ $a = 2k$ on k és un nombre enter

$\Rightarrow$ $a^2 = (2k)^2 = 2 \cdot (2k^2)$ on k és enter

$\Rightarrow$ $a^2 = 2\tilde{k}$ on $\tilde{k}$ és un nombre enter

$\Rightarrow$ a^2 és parell $\square$

2.- <u>Demostració per contrarecíproc:</u>

a^2 és parell $\Rightarrow$ a és parell

|||

a no parell (senar) $\Rightarrow$ a^2 no parell (senar)

a senar $\Rightarrow$ $a = 2k + 1$ on k és un nº enter

$\Rightarrow$ $a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$\Rightarrow$ $a^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2\tilde{k} + 1$

$\Rightarrow$ $a^2 = 2\tilde{k} + 1$ on $\tilde{k}$ és enter $\Rightarrow$ a^2 és senar $\square$

Demostració per contradicció

(o reducció a l'absurd)

$P \Rightarrow Q$ vol dir que si P és cert llavors Q també.

Per tant, si aquesta afirmació és certa, P i $\neg Q$ no poden donar-se alhora.

ex. *Si copiar implica suspendre, no es pot donar que s'hagi copiat i que no s'hagi suspès.*

> Les demostracions per contradicció es basen en suposar P i $\neg Q$ certs alhora i mitjançant una successió de passos arribar a un resultat absurd.

D'aquesta manera la hipòtesi de partida ha de ser falsa (i per tant si P és cert, llavors Q també).

ex. $x^2 = 2$ *no té solució en* $\mathbb{Q}$ *(conjunt de nombres racionals).*

<u>Dem:</u> Suposem que existeix $x \in \mathbb{Q}$ solució de $x^2 = 2$.

Que $x \in \mathbb{Q}$, vol dir que existeixen dos nombres enters p i q, tals que $x = \frac{p}{q}$. A més podem suposar que $\frac{p}{q}$ és una fracció irreductible, és a dir, que p i q són primers entre si.

Llavors, $x^2 = 2 \Longrightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Longrightarrow p^2 = 2q^2$.

Per tant, p^2 és un nombre parell, i per tant p és un nombre parell i es pot escriure com $p = 2\tilde{p}$.

D'aquesta manera, l'equació queda com:
$(2\tilde{p})^2 = 2q^2 \Longrightarrow 4\tilde{p}^2 = 2q^2 \Longrightarrow 2\tilde{p}^2 = q^2$.

Per tant, q^2 també és un nombre parell i per tant q és parell.

D'aquesta manera, arribem a que tan p com q són nombres parells que contradiu el fet que p i q siguin primers entre si.

Com que arribem a una contradicció, podem deduir que l'equació $x^2 = 2$ no té solució en $\mathbb{Q}$, tal i com volíem demostrar. $\square$

En resum, per demostrar $P \Rightarrow Q$ es poden utilitzar les següents tècniques:

- **Demostració directa**. $P \Rightarrow Q$
  Es suposa P cert i s'arriba a Q cert.
- **Demostració per contrarecíproc**.
  Es demostra $\neg Q \Rightarrow \neg P$
- **Demostració per contradicció**. Suposem alhora P i $\neg Q$ i arribem a una contradicció.
- **Demostració per inducció**.
  Aquest tipus de demostracions s'utilitzen per a demostrar propietats que són vàlides per tots els nombre naturals.

A més, $P \Leftrightarrow Q$ consta de dues demostracions:

1) $P \Rightarrow Q$ 2) $Q \Rightarrow P$.

El conjunt dels nombres naturals. El conjunt dels nombres enters, racionals i reals. Principi d'inducció.

- El conjunt dels nombres naturals
- El conjunt dels nombres enters
- El conjunt dels nombres racionals
- El conjunt dels nombres reals
- Principi d'inducció

El conjunt dels nombres naturals

Els nombres, com ara el 2, el -3, la fracció $\frac{1}{2}$ o π, són creacions humanes que han anat responent a necessitats diverses.

Per exemple, des de l'antiguitat, els éssers humans han tingut la necessitat de comptar. D'aquesta manera sorgeix el concepte dels nombres naturals

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

En el conjunt $\mathbb{N}$ hi tenim dues propietats bàsiques: la suma $+$ i el producte $\cdot$.

El conjunt dels nombres enters

El conjunt $\mathbb{N}$ té una mancança. Imaginem que busquem un nombre $x \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\boxed{a + x = 0}$$

Aquest nombre no existeix en el conjunt dels naturals, i és per això que definim el conjunt dels enters com a

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

en aquest conjunt si té solució l'equació $a + x = 0$. La solució és $x = -a$.

El conjunt de nombre enters es va començar a utilitzar quan van sorgir els acords comercials. Representen els deutes... o els nombres vermells d'un compte corrent...

El conjunt dels nombres racionals

Recuperem ara el conjunts dels nombres enters $\mathbb{Z}$. Considerem un nombre enter $a \in \mathbb{Z}$ i plantegem l'equació

$$\boxed{a \cdot x = 1}$$

Si $a \neq 1$, no existeix solució d'aquesta equació en $\mathbb{Z}$.

Així doncs, se'ns fa necessària la creació d'un nou conjunt, $\mathbb{Q}$, que anomenarem el conjunt dels nombres racionals. Aquest conjunt ve definit de la següent forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}.$$

En aquest conjunt, l'equació $a \cdot x = 1$ té solució. La solució és $x = \dfrac{1}{a}$.

El conjunt dels nombres racionals va aparèixer de la necessitat de poder representar les parts d'una totalitat, com ara el fet de dividir un terreny agrícola en tres parts iguals com a part d'una herència.

<u>Recordatori:</u> tot nombre racional es pot expressar en forma de decimal exacte o periòdic.

El conjunt dels nombres reals

Considerem ara un nombre racional $x \in \mathbb{Q}$ i plantegem l'equació

$$\boxed{x^2 = 2}$$

Aquesta equació no té solució en $\mathbb{Q}$, és a dir $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ja que no es pot escriure com a fracció de dos nombres enters.

Ja els grecs es van adonar que hi havia nombres que no eren ni decimals exactes ni periòdics.

Per exemple, en una circumferència, el quocient entre el perímetre i el diàmetre no és racional ($\frac{P}{2r} = \pi$). O en un quadrat, el quocient entre la diagonal i un costat tampoc és racional ($\frac{d}{c} = \sqrt{2}$).

El conjunt de nombres decimals no periòdics s'anomenen **nombres irracionals**.

El conjunt de nombres format pels nombres racionals ($\mathbb{Q}$) i els nombres irracionals s'anomena el **conjunt dels nombres reals** i es denota per $\mathbb{R}$.

Observació 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Propietat 1. *Els nombres reals es poden representar per punts d'una recta anomenada recta real. El punt corresponent al zero s'anomena origen.*
Recíprocament, per a cada punt de la recta hi ha un i només un nombre real associat.

Exercici Proposat 2. *Passeu els nombres* $1.3\widehat{26}$ *i* $0.\hat{9}$ *a fracció.*

Exercici Proposat 3. *Demostreu que en una circumferència, el quocient entre el perímetre i el diàmetre és* π *i per tant no és un nombre racional.*

Exercici Proposat 4. *Demostreu que en un quadrat, el quocient entre la diagonal i un costat és* $\sqrt{2}$ *i per tant no és un nombre racional.*

Recordatori: propietats de la suma i del producte de nombres racionals

Associativa de la Suma: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

Associativa del Producte: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

Commutativa de la Suma: $a+b=b+a$.

Commutativa del Producte: $a\cdot b=b\cdot a$.

Existència d'Element Neutre per al Producte:

$$a\cdot 1=a.$$

Distributiva del producte respecte de la suma:

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c).$$

Existència d'Element Neutre per a la Suma:

$$a+0=a.$$

Existència d'Element Oposat per a la Suma:

$$\forall a\in\mathbb{Q}, \exists x\in\mathbb{Q} \text{ tal que } a+x=0.$$

Existència d'Element Invers per al Producte:

$$\forall a\in\mathbb{Q}, a\neq 0, \exists x\in\mathbb{Q} \text{ tal que } a\cdot x=1.$$

Principi d'inducció

Imaginem que volem demostrar que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

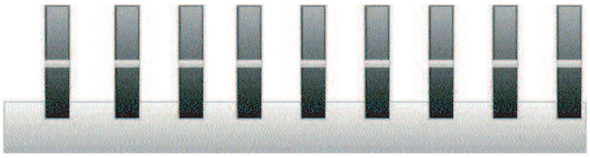
és cert per tot nombre natural n ($\forall n \in \mathbb{N}$).

El primer que es pot fer és seleccionar uns quants nombres naturals (n=1,2,7,...) i veure que la igualtat és certa per aquests valors. Això, però, no és suficient per assegurar que la propietat és certa $\forall n \in \mathbb{N}$.

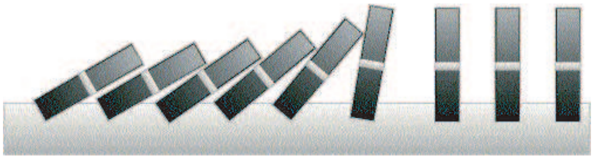
El problema que ens plantegem és demostrar una propietat que fa referència a TOTS els nombres naturals.

Com es pot demostrar que una propietat és certa per tot nombre natural sense haver de comprobar la propietat pels infinits nombres?

Imaginem que tenim una fila infinita de fitxes de domino, alineades i preparades per a ser tombades

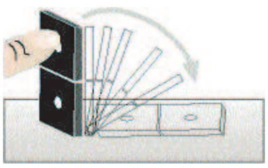


Sabem per experiència, que si les peces estan ben col.locades, en caure la primera fitxa cauran totes.

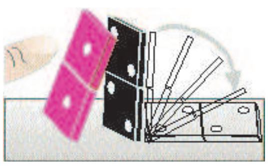


Com es pot probar que totes les fitxes cauran?

1.- Sabem per experiència que si colpegem una fitxa de dominó, aquesta caurà.



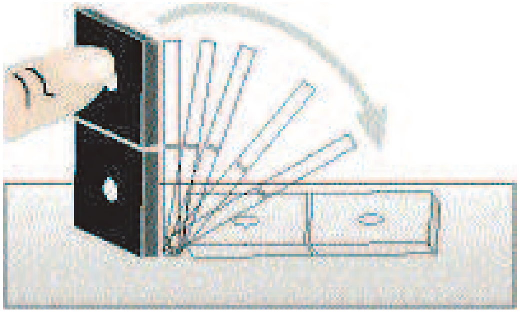
2.- També sabem que si una fitxa cau, i la següent està ben col.locada, la següent també caurà.



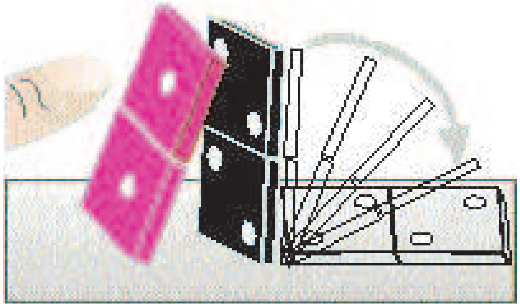
INTUICIÓ: la intuició ens diu que les fitxes aniran caient una darrera l'altra infinitament.

RESUM:

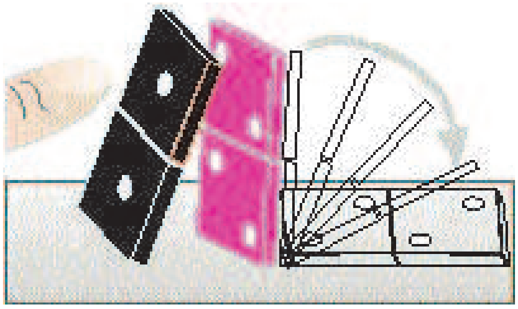
Si podem demostrar:



1.- que la primera fitxa del dominó cau

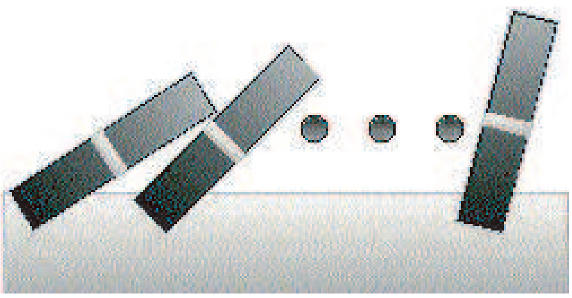


2.- que si una fitxa cau



la següent caurà

Llavors podem assegurar que totes les fitxes cauran.



El problema que ens plantegem és demostrar una propietat, diguem-ne $\mathcal{P}$, que fa referència a tots els nombres naturals. És a dir, volem veure que

$$\mathcal{P}(n) \text{ és cert } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per veure que $\mathcal{P}(n)$ és certa $\forall n \in \mathbb{N}$ és suficient veure que:

(a) Cas base: $\mathcal{P}(1)$ és cert

(b) suposant que $\mathcal{P}(n)$ és cert, veure que $\mathcal{P}(n+1)$ és cert.

El principi d'inducció ens permet demostrar propietats que fan referència a tots els nombres naturals, $\mathbb{N}$.

Exemple d'aplicació del principi d'inducció

Anem a demostrar que per a tot nombre natural n es compleix

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Hem de veure dues coses:

1r. $\boxed{\text{cas base } n=1\text{:}}$

la propietat és certa per a $n=1$, ja que $1=\frac{1\cdot 2}{2}$.

2n. $\boxed{\text{cert per a } n=k \Longrightarrow \text{cert per a } n=k+1}$

Suposem que la propietat és certa per a $n=k$, és a dir, suposem que és cert que:

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Hem de veure que també és certa per a $n=k+1$. Per tant, volem veure que

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Per tant la propietat és certa $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Exercici Proposat 5. *Useu el principi d'inducció per veure que les següents igualtats són certes per tot nombre natural:*

(a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

(b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

El conjunt dels nombres complexos. Operacions i propietats.

- El conjunt dels nombres complexos
- Forma binòmica
- Forma polar o mòdul-argumental
- Forma exponencial d'un nombre complex
- Operacions a $\mathbb{C}$

El conjunt dels nombres complexos

Recordem que els diferents conjunts numèrics $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ els hem anat introduint per la necessitat de resoldre noves situacions:

De $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$: necessitat de resoldre $a + x = 0$

De $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$: necessitat de resoldre $a \cdot x = 1$

De $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$: necessitat de resoldre $x^2 = 2$

El conjunt $\mathbb{R}$ té una mancança. Imaginem que busquem un nombre $x \in \mathbb{R}$ de forma que

$$x^2 + 1 = 0.$$

Aquest nombre no existeix en $\mathbb{R}$.

Es defineix el **conjunt dels nombres complexos** com:

$$\mathbb{C} = \{x \text{ és solució de } x^2 + ax + b = 0, \text{ on } a, b \in \mathbb{R}\},$$

és a dir, $\mathbb{C}$ és el conjunt de nombres on tota equació de segon grau té solució.

Sabem que l'equació $x^2 + ax + b = 0$ té com a solució

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4ab}}{2}.$$

En el cas de que el discriminant $\Delta = a^2 - 4ab \geq 0$, obtenim dues solucions reals (o una si $\Delta = 0$).

Si el discriminant és negatiu, les solucions no són reals sinó complexes.

Considerem l'equació $x^2 + 1 = 0$. Les solucions d'aquesta equació són $x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.

$\sqrt{-1}$ es designa per i i rep el nom d'**unitat imaginària**. La propietat clau és que $i^2 = -1$.

La unitat imaginària i ens permet trobar solucions de totes les equacions de segon grau, encara que el discriminant sigui negatiu.

ex. *Resoleu les següents equacions de segon grau:*
$x^2+4=0$, $x^2+b^2=0$, $x^2+4x+5=0$.

$$\boxed{x^2+4=0}$$

$$x^2+4=0 \iff x^2=-4$$

$$\iff x=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{(-1)\cdot 4}=\pm\sqrt{-1}\sqrt{4}=\pm 2i$$

$$\boxed{x^2+b^2=0}$$

$$x=\pm\sqrt{-b^2}=\pm\sqrt{(-1)\cdot b^2}=\pm\sqrt{-1}\sqrt{b^2}=\pm|b|\cdot i$$

Per tant, qualsevol nombre de la forma $c\cdot i, c\in\mathbb{R}$ també és un nombre complex, que s'anomena **nombre imaginari pur**.

$$\boxed{x^2+4x+5=0}$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 5}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-4\pm 2i}{2}=-2\pm i$$

Per tant, la suma de nombres reals amb nombres imaginaris purs també és un nombre complex.

Forma binòmica

Definició 1. *Es defineix el conjunt $\mathbb{C}$ dels nombres complexos com:*

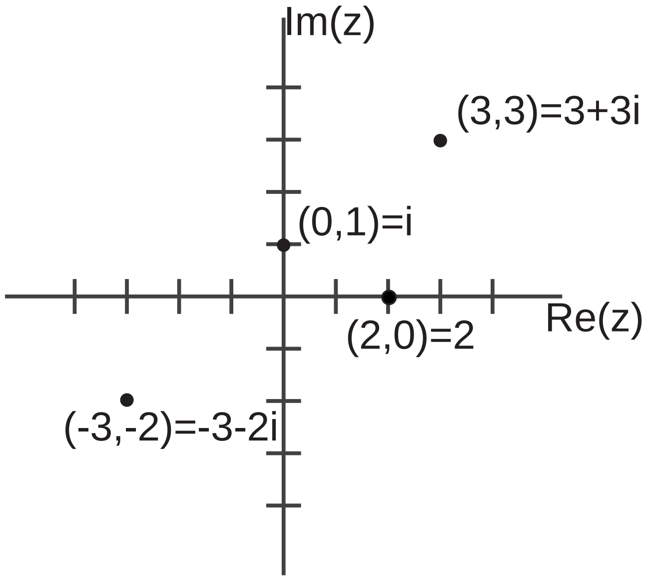
$$\mathbb{C} = \{z = a + b \cdot i \ \ on \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

El nombre real a s'anomena **part real** de z i s'escriu $a = \mathrm{Re}(z)$; el nombre b s'anomena **part imaginària** de z, indicat per $b = \mathrm{Im}(z)$.

Propietats bàsiques

- Dos nombres complexos són iguals si i només si tenen igual la part real i la imaginària.
- Inclusió de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$: tot nombre real $a \in \mathbb{R}$ està associat al nombre complex $a + 0 \cdot i$, és a dir, és un nombre complex amb part imaginària nul.la.

- Tot nombre complex $a + b \cdot i$ es pot veure com un parell ordenat $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Per tant, tot nombre complex es pot representar en un pla anomenat el pla complex. Es pren sobre l'eix de les x la part real i s'anomena eix real, i sobre l'eix de les y la part imaginària que s'anomena eix imaginari.



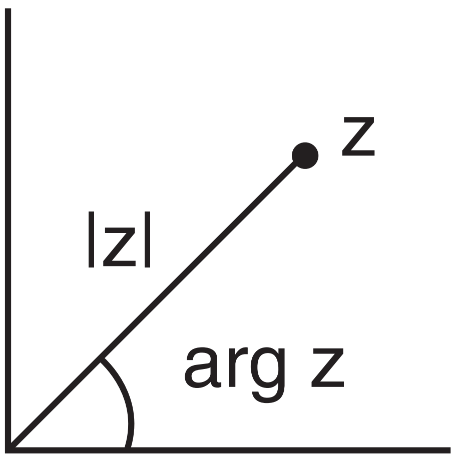
Exercici Proposat 6. *Representeu en el pla complex els següents nombres:* 3, i, $1 + i$, $-i$, $-1 - i$, $3 + 4i$, $3 - 4i$.

Forma polar o mòdul-argumental

La forma binòmica d'un nombre ens associa tot nombre complex $z = a + bi$ amb un punt del pla de coordenades (a, b).

Ara bé, donat un punt del pla, les coordenades cartesianes (a, b) no són la única forma de representar aquest punt. Una forma molt comú de representar un punt del pla (a, b) és donant:

- la distància del punt (a, b) a l'origen de coordenades, que s'anomena magnitud o mòdul i habitualment es denota per $r = |z|$,
- l'angle que forma la recta que uneix els punts (a, b) i $(0, 0)$ amb l'eix positiu d'abscisses (en sentit antihorari), que també es pot anomenar argument i es denota per $\theta = \arg z$.



Exercici Proposat 7. *Utilitzant el teorema de Pitagores i propietats trigonomètriques del sinus, cosinus o tangent d'un angle, determineu el mòdul i l'argument dels nombres* $1+i$, $-1-i$, $3+4i$ *i* $3-4i$.

Definició 2. *(***Mòdul***) A cada nombre complex $z = a + bi$ se li associa un nombre real positiu anomenat* **mòdul** *de z, denotat per $|z|$ i definit per:*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Definició 3 (argument principal)**.** *Si $z = a + bi$ és un nombre complex, es defineix l'***argument principal** *de z, escrit $\arg z$, com l'únic nombre real θ tal que:*

$$a = |z| \cos\theta, \quad b = |z| \sin\theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Definició 4 (argument)**.** *S'anomena* **argument** *d'un nombre complex qualsevol element del conjunt $\{\arg z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.*

Observació 2. *Càlcul pràctic de l'argument utilitzant la calculadora:*

Primer calculem

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}.$$

Per obtenir l'angle en el quadrant correcte hem de fer les següents correccions

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$, *si* a *(part real) és positiu, o bé*

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$, *si* a *és negatiu i* b *és positiu, o bé*

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$, *si* a *i* b *són negatius.*

En tots els casos, obtindrem un angle θ *dintre de l'interval* $[-\pi, \pi]$.

IMPORTANT: a l'hora de calcular l'argument d'un nombre complex és molt important realitzar un dibuix per a evitar calcular un angle incorrecte (generalment en un altre quadrant).

El mòdul, $r = |z|$, i l'argument, $\theta = \arg z$, d'un nombre complex ens permeten escriure

$$\begin{aligned} z &= a + bi = r\cos\theta + r\sin\theta i \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

que s'anomena la **forma polar** del nombre complex, i es denota per r_θ.

Les coordenades $r = |z|$ i $\theta = \arg z$ s'anomenen **coordenades polars**.

Exercici Proposat 8. *Donat el nombre complex $z = 1 + i$, passar-lo a coordenades polars. I donats els nombres complexos $z = 1_0, 2_\pi, 1_{\pi/3}$, passar-los a forma binòmica.*

Forma exponencial d'un nombre complex

Definició 5 (exponencial)**.** *Si* $z = z_1 + z_2 i \in \mathbb{C}$*, es defineix* **l'exponencial** *de* z *com el nombre complex:*

$$\exp(z) = e^{z_1}(\cos z_2 + i \sin z_2),$$

que usualment es denota per $\exp(z) = e^z$*.*

Observació 3. *Noteu que si considerem* $z = 0 + i\theta$*,* $\theta \in \mathbb{R}$*, llavors tenim que:*

$$\exp(z) = \exp(i\theta) = e^0(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Llavors, si recordem la forma polar d'un nombre complex $z = r_\theta = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, l'exponencial d'un nombre complex ens permet escriure que

$$z = r_\theta = r\exp(\theta i) = re^{\theta i},$$

que s'anomena la forma exponencial de z.

Proposició 1. *Es compleixen:*

(1) $e^{(\theta_1+\theta_2)i} = e^{\theta_1 i} e^{\theta_2 i}$.

(2) $e^0 = 1$.

(3) $e^{-\theta i} = \dfrac{1}{e^{\theta i}}$.

(4) $e^{\theta i + 2\pi k i} = e^{\theta i}$.

Operacions a $\mathbb{C}$

Es defineixen a $\mathbb{C}$ dues operacions internes, escrites $+$ i $\cdot$, anomenades suma i producte, mitjançant:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + x_2 i) + (y_1 + y_2 i) \\ &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (x_1 + x_2 i) \cdot (y_1 + y_2 i) \\ &= x_1 y_1 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + x_2 y_2 \underbrace{i^2}_{-1} \\ &= (x_1 y_1 - x_2 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i \end{aligned}$$

qualssevol que siguin els elements $x, y \in \mathbb{C}$.

Suma i resta de nombres complexos

A l'hora de sumar dos nombres complexos $x, y \in \mathbb{C}$, la manera més senzilla és tenir-los expressats en forma binòmica, ja que:

$$x+y = (x_1+x_2 i)+(y_1+y_2 i) = (x_1+y_1)+(x_2+y_2)i,$$

$$x-y = (x_1+x_2 i)-(y_1+y_2 i) = (x_1-y_1)+(x_2-y_2)i.$$

Si tinguéssim els nombres expressats en forma polar o exponencial, $x = (r_1)_{\theta_1} = r_1 e^{\theta_1 i}, y = (r_2)_{\theta_2} = r_2 e^{\theta_2 i}$, el millor és passar-los a forma binòmica i llavors sumar o restar, és a dir:

$$x = (r_1)_{\theta_1} = \underbrace{r_1 \cos\theta_1}_{x_1} + \underbrace{r_1 \sin\theta_1}_{x_2} i,$$

$$y = (r_2)_{\theta_2} = \underbrace{r_2 \cos\theta_2}_{y_1} + \underbrace{r_2 \sin\theta_2}_{y_2} i.$$

Exercici Proposat 9. *Calcula la suma dels següents nombres:* $1_{\frac{\pi}{2}} + 2_\pi$, $4_{\frac{\pi}{4}} + 2_{\frac{-\pi}{2}}$ *i comprova que*

$$r_\alpha + s_\beta \neq (r+s)_{\alpha+\beta}.$$

Producte i divisió de nombres complexos

El producte i la divisió de nombres complexos es pot fer tant en forma binòmica com en forma polar o exponencial. De totes maneres és recomanable fer les operacions en polar o exponencial.

Per poder dividir nombres complexos en forma binòmica cal introduir el concepte de conjugat d'un nombre complex.

Definició 6 (conjugat)**.** *Si $z = z_1 + z_2 i \in \mathbb{C}$, es defineix el* **conjugat** *de z com el nombre complex*

$$\overline{z} = z_1 - z_2 i.$$

Proposició 2. *Es compleixen:*

(1) $z + \overline{z} = 2z_1 = 2\mathrm{Re}(z)$.

(2) $z - \overline{z} = 2z_2 i = 2i\mathrm{Im}(z)$.

(3) $z \cdot \overline{z} = z_1^2 + z_2^2 = |z|^2$.

ex. *Calcular el quocient* $\dfrac{1+2i}{3-4i}$ *i l'invers del nombre* $z = z_1 + z_2 i$ *fent les operacions en forma binòmica.*

$$\frac{1+2i}{3-4i} = \frac{1+2i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{3^2+4^2} =$$

$$= \frac{(3-8)+(6+4)i}{3^2+4^2} = \frac{-5+10i}{25} = \frac{-1+2i}{5}.$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\cdot\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} =$$

$$= \frac{1}{z_1+z_2 i} = \frac{1}{z_1+z_2 i}\cdot\frac{z_1-z_2 i}{z_1-z_2 i} = \frac{z_1-z_2 i}{z_1^2+z_2^2}.$$

Per tant, en forma binòmica el quocient de dos nombres complexos és:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

El producte i quocient de dos nombres en forma polar o exponencial, $z_1 = (r_1)_{\theta_1}$, $z_2 = (r_2)_{\theta_2}$ és:

$$z_1\cdot z_2 = (r_1)_{\theta_1}\cdot(r_2)_{\theta_2} = \left(r_1 e^{\theta_1 i}\right)\left(r_2 e^{\theta_2 i}\right) = r_1 r_2 e^{(\theta_1+\theta_2)i},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(r_1)_{\theta_1}}{(r_2)_{\theta_2}} = \frac{r_1 e^{\theta_1 i}}{r_2 e^{\theta_2 i}} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\theta_1-\theta_2)i}.$$

Exercici Proposat 10. *Calculeu:* $\dfrac{1}{2-3i}\cdot\dfrac{1}{1+i}$, $\dfrac{1+2i}{3-4i}+\dfrac{2-i}{5i}$, $(3+4i)^2$, $(3+4i)^{10}$.

Exercici Proposat 11. *Vegeu que:*

(1) el conjugat de la suma és la suma de conjugats: $\overline{z+u}=\overline{z}+\overline{u}$.

(2) el conjugat del producte és el producte de conjugats: $\overline{zu}=\overline{z}\,\overline{u}$.

(3) el mòdul d'un nombre i del seu conjugat són iguals: $|\overline{z}|=|z|$.

(4) el producte d'un nombre pel seu conjugat és el mòdul del nombre al quadrat: $z\overline{z}=|z|^2$.

(5) el mòdul del producte és el producte de mòduls, i l'argument és la suma d'arguments: $|zu|=|z||u|$, $\arg(zu)=\arg(z)+\arg(u)$.

(6) el mòdul d'un quocient és el quocient de mòduls i l'argument és la diferència dels arguements: $|\frac{z}{u}|=\frac{|z|}{|u|}$, $\arg(\frac{z}{u})=\arg(z)-\arg(u)$.

Potenciació i radicació de nombres complexos

Per elevar i fer arrels de nombres complexos sempre operarem en forma polar o exponencial.

Sigui $z = r_\theta = re^{\theta i}$, llavors tenim que:

$$
\begin{aligned}
z^2 &= zz = re^{\theta i} re^{\theta i} = r^2 e^{2\theta i} = r^2_{2\theta} \\
z^3 &= z^2 z = r^2 e^{2\theta i} re^{\theta i} = r^3 e^{3\theta i} = r^3_{3\theta} \\
z^4 &= z^3 z = r^3 e^{3\theta i} re^{\theta i} = r^4 e^{4\theta i} = r^4_{4\theta} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Proposició 3. *Si $z = r_\theta \in \mathbb{C}$, llavors*

$$z^n = r^n_{n\theta} = r^n e^{n\theta i},$$

que es coneix amb el nom de **fórmula de Moivre**.

Exercici Proposat 12. *Demostreu per inducció que la fórmula de Moivre és certa per tot nombre $n \in \mathbb{N}$.*

Exercici Proposat 13. *Calculeu:*

$(1_0)^8, (1_{\frac{\pi}{4}})^8, (1_{\frac{\pi}{2}})^8,$

$(1_{\frac{3\pi}{4}})^8, (1_\pi)^8, (1_{-\frac{\pi}{4}})^8, (1_{-\frac{\pi}{2}})^8, (1_{-\frac{3\pi}{4}})^8.$

Definició 7. *L'arrel enèsima d'un nombre complex $z \in \mathbb{C}$, s'expressa com $\sqrt[n]{z}$ i és tal que:*

$$(\sqrt[n]{z})^n = z.$$

Proposició 4. *Tot nombre complex $z = r_\theta$ té exactament n arrels enèsimes. Si s_β és una de les arrels, $s_\beta = \sqrt[n]{z}$, llavors:*

(1) $s = \sqrt[n]{r}$,

(2) $\beta = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, .., n-1.$

Dem. Hem de comprobar que $(s_\beta)^n = z$.

Usant la fòrmula de Moivre tenim que:

$$(s_\beta)^n = s^n_{n\beta}.$$

Sabem a més que perquè dos nombre complexos siguin iguals han de tenir igual mòdul i igual argument o angle.

Per tant, perquè $s^n_{n\beta} = r_\theta$ cal que:

$$s^n = r \qquad \text{i} \qquad n\beta = \theta + \text{múltiples de } 2\pi.$$

Com que $s = \sqrt[n]{r} \Rightarrow s^n = r$, i com que

$\beta = \dfrac{\theta + 2\pi k}{n} \Rightarrow n\beta = \theta + 2\pi k$ que és el mateix angle. $\square$

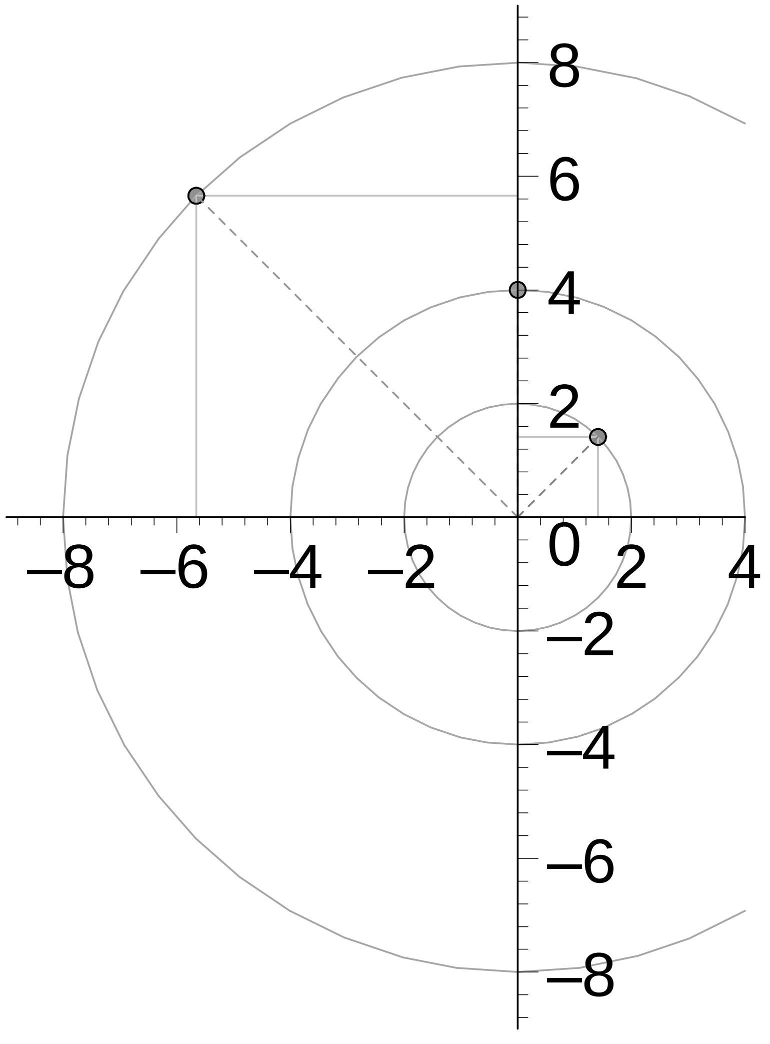
Interpretació geomètrica de la potenciació i radicació de nombres complexos

▷ Potències del nombre $2_{\pi/4}$

$$z = 2_{\frac{\pi}{4}} = 2e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}(1+i)$$

$$z^2 = 4_{\frac{\pi}{2}} = 4e^{\frac{\pi}{2}i} = 4i$$

$$z^3 = 8_{\frac{3\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = 4\sqrt{2}(-1+i)$$



▷ Potències del nombre $1+i$

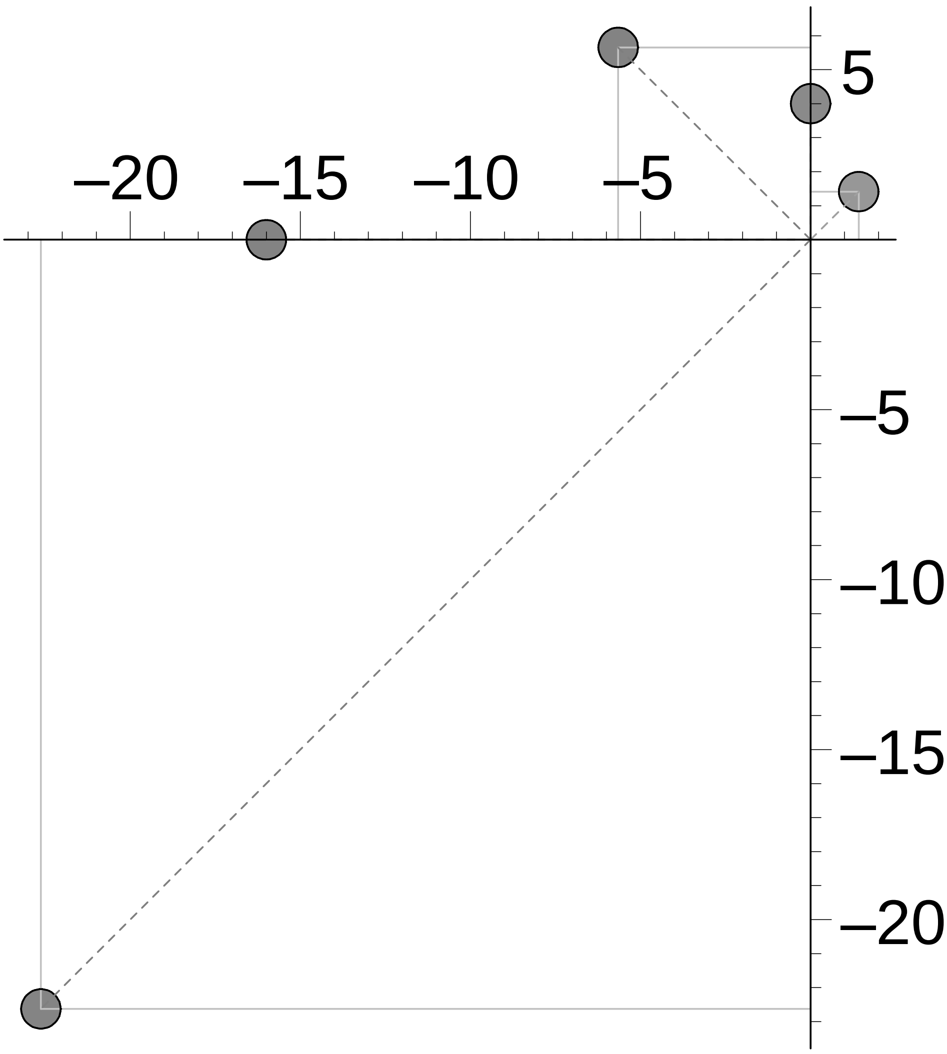
$$z = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = 1+i$$

$$z^2 = 2_{\frac{\pi}{2}} = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2i$$

$$z^3 = 2\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = 2(-1+i)$$

$$z^4 = 4_{\pi} = 4e^{\pi i} = -4$$

$$z^5 = 4\sqrt{2}_{-\frac{3\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i} = 4(-1-i)$$

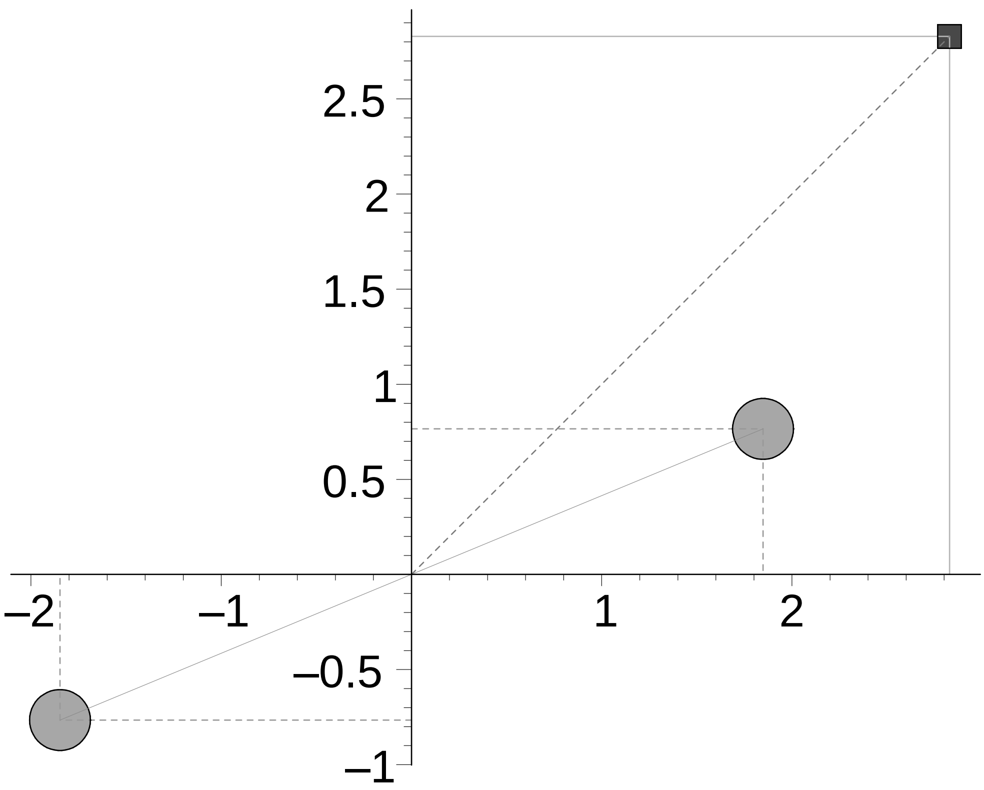


▷ Arrels quadrades de $2\sqrt{2}(1+i)$

$$z = 2\sqrt{2}(1+i) = 4_{\frac{\pi}{4}}$$

$$z_1 = 2_{\frac{\pi}{8}} = 1.848 + .765i$$

$$z_2 = 2_{\frac{\pi}{8}+\pi} = 2_{-\frac{7\pi}{8}} = -1.848 - .765i$$



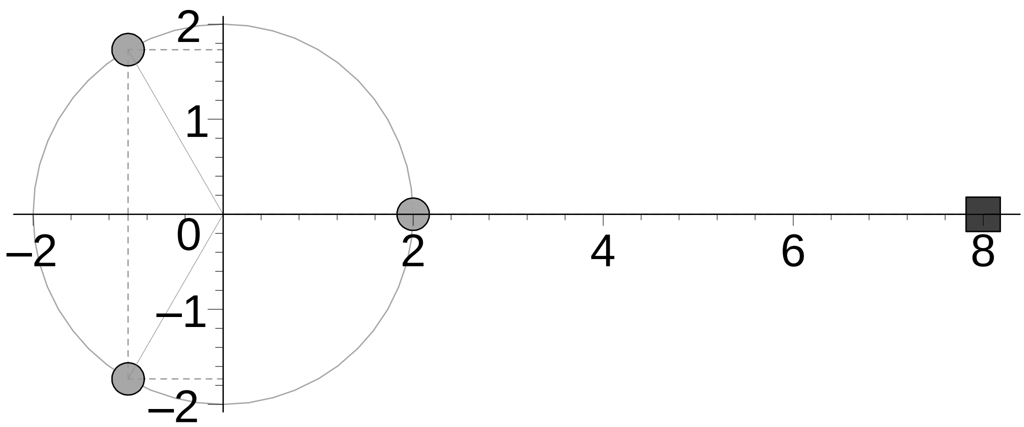
▷ Arrels cúbiques de 8

$$z = 8 = 8_0$$

$$z_1 = 2_0 = 2$$

$$z_2 = 2_{0+\frac{2\pi}{3}} = 2_{\frac{2\pi}{3}} = -1 + \sqrt{3}i$$

$$z_3 = 2_{0+2\frac{2\pi}{3}} = 2_{\frac{4\pi}{3}} = 2_{-\frac{2\pi}{3}} = -1 - \sqrt{3}i$$



▷ Arrels quartes de -16

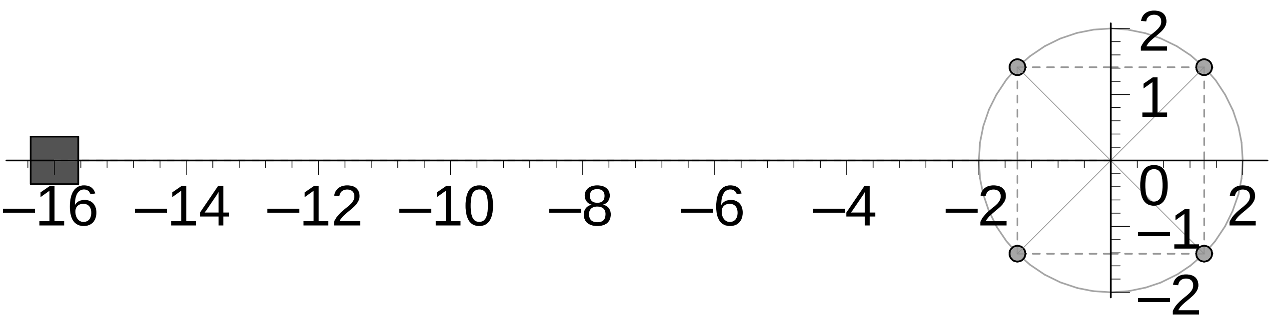
$$z = -16 = 16_{-\pi}$$

$$z_1 = 2_{-\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(1-i)$$

$$z_2 = 2_{-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}} = 2_{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(1+i)$$

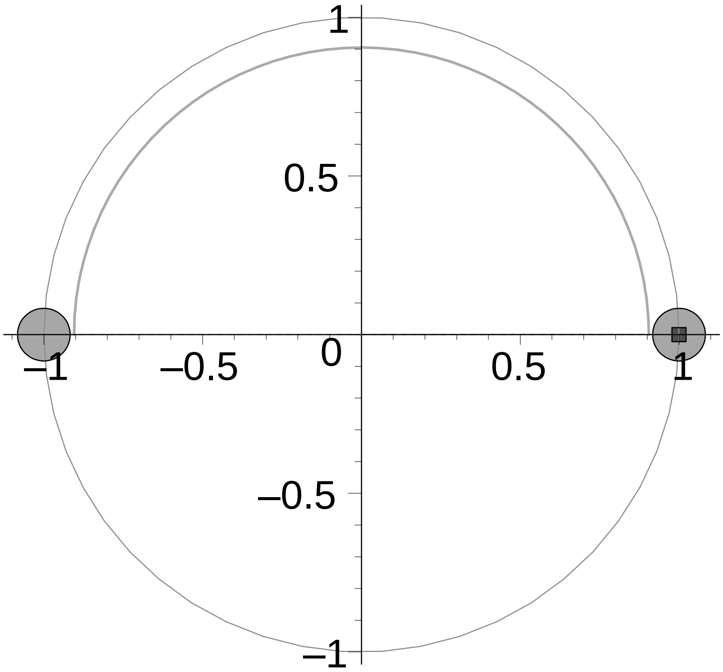
$$z_3 = 2_{-\frac{\pi}{4}+2\frac{\pi}{2}} = 2_{\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}(-1+i)$$

$$z_4 = 2_{-\frac{\pi}{4}+3\frac{\pi}{2}} = 2_{\frac{5\pi}{4}} = 2_{-\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}(-1-i)$$

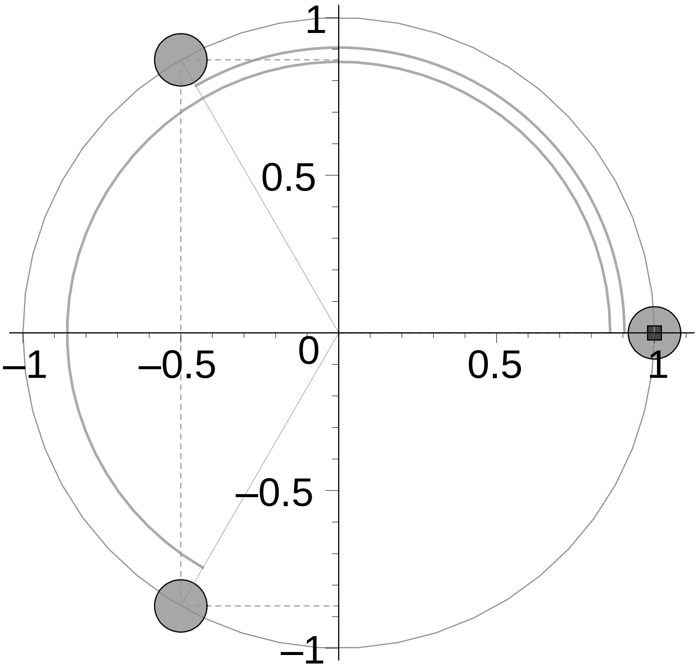


▷ Arrels quadrades, cúbiques, quartes i cinquenes de la unitat

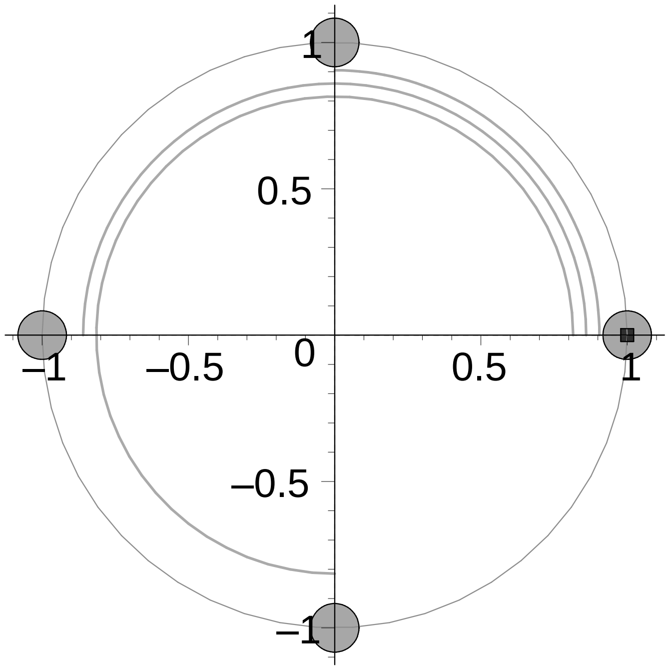
$$z1 = 1, \; z_2 = 1_{\pi}$$



$$z1 = 1, \; z_2 = 1_{\frac{2\pi}{3}}, \; z_3 = 1_{-\frac{2\pi}{3}}$$



$$z1 = 1,\ z_2 = 1_{\frac{\pi}{2}},\ z_3 = 1_{\pi},\ z_4 = 1_{-\frac{\pi}{2}}$$



$$z1 = 1,\ z_2 = 1_{\frac{2\pi}{5}},\ z_3 = 1_{\frac{4\pi}{5}},\ z_4 = 1_{-\frac{4\pi}{5}},\ z_5 = 1_{-\frac{2\pi}{5}}$$