Diseño de organizaciones didácticas para la articulación del bachillerato con el primer ciclo universitario

Lidia Serrano, Marianna Bosch, Josep Gascón

1. Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad

Las investigaciones llevadas a cabo en la TAD sobre las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y el primer ciclo universitario (Fonseca 2004; Bosch, Fonseca y Gascón 2004) han puesto en evidencia la atomización y rigidez del bagaje matemático de los alumnos cuando llegan a la universidad, atribuyéndolas a lo que se ha definido como una "incompletitud" de las organizaciones matemáticas (en adelante OM) que se estudian en Secundaria.

Dicha incompletitud matemática estaría relacionada con una "incompletitud didáctica" causada por una débil realización de algunos *momentos* del proceso de estudio y por la ausencia de un cuestionamiento inicial que motive la introducción de las OM en el aula. Las matemáticas de Secundaria aparecen así como una yuxtaposición de OM *puntuales* y *rígidas*, que consisten básicamente en aplicar técnicas predeterminadas a tareas aisladas, con un entorno tecnológico-teórico limitado que asume una función meramente descriptiva y resulta poco operativo para justificar el uso de las técnicas, evaluar las organizaciones matemáticas construidas, desarrollarlas y conectarlas entre sí. Se plantea entonces la necesidad de diseñar nuevos dispositivos didácticos que, atendiendo a las restricciones actuales de la enseñanza secundaria, permitan – por lo menos localmente – poner en marcha procesos de estudio en los que se vivan los diferentes momentos didácticos y que, partiendo de una cuestión problemática inicial con sentido y pertinencia para el grupo de alumnos, conduzcan a la construcción de OM *locales relativamente completas* como respuesta a dicha cuestión.

Se podría pensar que el lugar "natural" de existencia de estos dispositivos didácticos sería la enseñanza universitaria. En ella se debería poder hacer vivir procesos didácticos más largos y completos, partiendo de cuestiones que retomaran las OM puntuales que se estudian en Secundaria, las cuestionaran y suscitaran su desarrollo, para articularlas e integrarlas en otras OM más amplias y completas. Pero en realidad la situación actual es muy distinta. No sólo la incompletitud de las OM de la enseñanza secundaria no se remedia en la universidad (a pesar de disponer de los instrumentos para hacerlo), sino que los distintos tipos de dispositivos didácticos que se proponen para facilitar el paso de la Secundaria a la Universidad parecen contribuir a *agravar la atomización y rigidez* de las OM puestas en manos de los alumnos.

Nuestro trabajo intentará justificar esta última afirmación tomando en consideración un pequeño fenómeno que ha tenido lugar en España durante estos últimos 10 años coincidiendo con la llegada a la universidad de las generaciones de la reforma educativa de 1990 que prolongó la enseñanza obligatoria hasta los 16 años y redujo la secundaria post-obligatoria (el bachillerato) de cuatro a dos cursos. A finales de los años 90, un gran número de universidades puso en marcha unos cursos "propedéuticos" o preparatorios para los alumnos que ingresaban en la universidad, denominados también "matemáticas cero", de corta duración pero ambiciosa misión. Su principal objetivo es facilitar el tránsito de los alumnos entre las dos instituciones, "remendando" o "completando" los contenidos matemáticos que se estudian en Secundaria con aquellos que se consideran imprescindibles para cursar las asignaturas de matemáticas del primer ciclo universitario.

Para el investigador en didáctica, estos cursos constituyen un reflejo material del análisis espontáneo que realizan los matemáticos universitarios sobre las insuficiencias de la formación en

Secundaria y sus posibilidades de remediación. Dejaremos aquí de lado la problemática del juego de poderes, tensiones e inercias que configura la relación entre las dos instituciones y que fue sin duda la que condujo a la institución universitaria a intentar mantener el antiguo estado de cosas mediante un simple agregado de formación, en lugar de transformar y adaptar la enseñanza universitaria a la nueva formación de Secundaria. Nos centraremos, por un lado, en presentar de forma sucinta la observación y análisis de dos cursos propedéuticos realizados en septiembre 2004 en dos centros universitarios, con planteamientos y realizaciones didácticas distintas. Por otro lado, mostraremos un curso diseñado y experimentado por nuestro equipo de investigación en didáctica que, como veremos, se basa en un planteamiento totalmente opuesto a los anteriores.

2. DOS CASOS DE REALIZACIÓN DE UN CURSO PROPEDÉUTICO

Dentro de la amplia oferta de cursos ofertados en los diferentes centros universitarios, hemos llevado a cabo el seguimiento de dos centros de nuestro entorno, una Facultad de Ciencias Experimentales y una de Ciencias Económicas y Empresariales. Tanto el alumnado, como los programas (ver recuadro) como el planteamiento general de los dos cursos eran muy distintos. Mientras en uno hay un “bombardeo” continuo de recordatorios de técnicas y tecnologías de manera muy oportunista siguiendo las necesidades de unas listas de ejercicios y problemas, en el otro se ve desfilar una gran cantidad de OM siguiendo una sucesión de temas fijada de antemano, sin ningún hilo conector entre ellos. En ambos casos, el objetivo del curso consiste en presentar al alumno, en unos pocos días, un temario bastante denso que, se supone, éste debería saber de antemano. El análisis detallado del reparto de responsabilidades entre profesor y alumnos, así como del tipo de actividad matemática que los alumnos se ven llevados a realizar muestra, en ambos casos, que se produce un aislamiento importante de las OM que los alumnos deben “recordar” y aprender a “dominar”.

CURSO 1 – EJEMPLO DE PROGRAMA Y CARACTERÍSTICAS:

Objetivo:
Conseguir que los alumnos tengan un nivel de matemáticas adecuado y homogéneo para poder seguir las diferentes asignaturas de la carrera. Se pretende evitar las inadecuaciones de contenidos que a veces los alumnos tienen para el seguimiento de las asignaturas, así como las diferencias de nivel entre los alumnos procedentes de diferentes centros.
Metodología:
Clases interactivas donde los alumnos aprendan solucionando ejercicios y problemas.
Contenido:
Bloque I Cálculo de potencias y raíces. Números combinatorios + Binomio de Newton. Repaso de funciones y gráficas. Polinomios de primer y Segundo grado. División de polinomios (Ruffini). Operaciones con fracciones algebraicas. Ecuaciones algebraicas e irracionales. Logaritmos y ecuaciones logarítmicas. Repaso de trigonometría. Ecuaciones trigonométricas. Progresiones aritméticas
Bloque II Sistemas de ecuaciones lineales. Métodos de resolución. Discusión. Rectas y planos. Paralelismo, perpendicularidad, incidencia.
Bloque III Cálculo de derivadas. Ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función. Crecimiento y decrecimiento de funciones. Máximos y mínimos. Gráficas de funciones. Límites. Límites indeterminados. Cálculo de primitivas. Regla de Barrow. Áreas planas y volúmenes de revolución.

CURSO 2 – EJEMPLO DE PROGRAMA Y CARACTERÍSTICAS:

Objetivo:
Exponer y revisar conceptos y técnicas básicas de cálculo que forman parte de los temarios de cursos pre-universitarios, y que serán necesarios posteriormente en la carrera.
Metodología:
La introducción de la mayor parte de conceptos y definiciones del curso se motivará a partir de la utilización de programario matemático específico (DERIVE), de fácil manejo casi sin necesidad de conocimientos informáticos previos. El programario tendrá el papel de " laboratorio de ensayo" de un enfoque intuitivo facilitando así el paso a un análisis más formal del contenido del curso, que constituye el verdadero núcleo del mismo.
Contenido:
Bloque I - Elementos básicos de trabajo con números: de los naturales a los reales:
Números. Cálculo algebraico. Ecuaciones de 1r grado. Sistemas de ecuaciones
Bloque 2 - Modelos matemáticos para explicar relaciones entre datos:
Sucesiones: progresiones y convergencia. Funciones: propiedades generales
Bloque 3 - Las funciones fundamentales y su uso:
Funciones lineales, potenciales, poli nómicas, Racionales, Exponenciales, Logarítmicas, Trigonométricas.

3. NUESTRA PROPUESTA DE TALLER

El curso que aquí presentamos está dirigido a alumnos que van a iniciar sus estudios universitarios en Administración de Empresas o Ciencias Empresariales en la Facultat d'Economía IQS de la Universidad Ramón Llull (Barcelona). El objetivo de dicho taller es intentar iniciar procesos de estudio motivados por una cuestión problemática inicial relacionada con los estudios que van a iniciar los alumnos. Esta cuestión debe tener un determinado carácter "generador" para permitir la construcción de OM locales relativamente completas como respuesta a la cuestión.

En la primera parte del taller experimentado, se parte inicialmente del estudio de una colección de empresas de las que se conocen los ingresos y costes como función de la cantidad producida, con el objetivo de determinar el intervalo de producciones que generan beneficios: es decir, determinar para qué valores x se cumple la desigualdad, $I(x) \geq C(x)$. La organización matemática que permitirá dar respuesta a la cuestión inicial puede considerarse como una articulación de dos OM que se estudian en Secundaria: por un lado la representación gráfica de funciones elementales (polinomios de grado ≤ 3, funciones exponenciales, funciones racionales y funciones raíces de polinomios de grado 1) y, por otro lado, el estudio de ecuaciones o inecuaciones de primer y segundo grado.

Para los estudiantes que acaban el bachillerato en España, estas dos OM aparecen muy poco conectadas entre sí. El estudio de ecuaciones e inecuaciones forma parte del trabajo algebraico con expresiones de primer y segundo grado que los alumnos estudian con anterioridad a la introducción de las funciones. Pero, dentro del estudio de funciones, las gráficas nunca aparecen como una herramienta para resolver ecuaciones e inecuaciones. Para el alumno, son siempre el producto final de una técnica muy estandarizada que empieza con la determinación del dominio de la función, luego el estudio de sus límites en los puntos frontera del dominio, la determinación de los puntos de cortes con los ejes, el cálculo de la derivada, el estudio de la monotonía, la concavidad y la convexidad, etc. En este sentido, la gráfica es siempre el punto final del proceso y no suele considerarse como un modelo de la relación entre dos magnitudes que puede resultar útil para resolver problemas. Los alumnos aprenden a representar funciones, pero no aprenden a hacer nada con estas representaciones. Por este motivo, cada función, sea o no elemental, se considera como un elemento aislado, casi como un pretexto para poner en marcha los pasos especificados previamente (dominio, límites, etc.) que conducen a la construcción de la gráfica. En particular, no se estudian las familias de funciones elementales como tales familias, porque para ellas el proceso anterior (dominio, límites, derivada, etc.) no es necesario. En efecto, basta con conocer la gráfica de las "funciones elementales básicas" $y = f(x)$ (recta $y = x$, parábola $y = x^2$, cúbica $y = x^3$, hipérbole $y = 1/x$ y exponencial $y = a^x$), para obtener la gráfica de cualquier función del tipo $y = af(x - b) + c$.

Así pues, esta primera parte del curso destinada al estudio de las desigualdades $I(x) \geq C(x)$ debe conducirse de tal modo que la representación gráfica de las funciones $y = I(x)$ e $y = C(x)$ y la determinación del intervalo deseado se realice de forma ágil para centrarse en nuevas cuestiones problemáticas: ¿para qué producciones hay beneficios? ¿en qué valor aproximado el beneficio es máximo?, ¿cómo afecta a la función de ingresos y al intervalo de beneficios un aumento del precio unitario del producto?, ¿cómo afecta al intervalo de beneficios una variación en los costes?, etc.

La segunda parte del curso se destinó al estudio en profundidad de un problema de consultoría empresarial real sobre la determinación de estrategias para determinar el precio de venta de un producto dado su coste unitario y los costes fijos de producción. A diferencia del caso anterior, los alumnos debían aquí *construir* el modelo funcional $y = I(x)$ e $y = C(x)$ antes de proceder a la resolución gráfica y algebraica de $I(x) \geq C(x)$. La evolución del problema hacia el estudio de un modelo funcional con parámetros acaba de dar sentido al estudio de las familias de funciones realizado en la primera parte del curso.

No hemos analizado todavía los resultados del curso experimentado. Disponemos para ello de todo el material producido en clase por los alumnos, el examen final y las respuestas a un cuestionario en el que se les pedía valorar distintos aspectos del curso: adecuación del horario, longitud, novedad del tipo de trabajo realizado, relación con las matemáticas de secundaria, ritmo de trabajo, explicaciones del profesor, expectativas iniciales, "cantidad" de conceptos nuevos abordados, aprovechamiento del curso, etc. En general, parece que los alumnos han percibido algún cambio importante en el tipo de trabajo realizado en el curso respecto al que estaban acostumbrados a llevar a cabo en Secundaria: "pocas ideas o conceptos nuevos", "en S se hacían las cosas sin saber por qué y de forma mecánica, en el curso, te explican para que sirven las cosas y de forma más sencilla, sin tener que hacer tantos cálculos", "hemos visto nuevas formas de resolución: más practicas y eficaces", "el ritmo del curso es mejor, ya que es más práctico, tiene poco contenido teórico, aunque exige un seguimiento diario."

4. MATERIAL DEL TALLER

MATEMÁTICAS CURSO SEPTIEMBRE 2005

Objetivo:
El curso tiene una orientación práctica centrado en la utilización de las funciones de variable real como modelo para estudiar situaciones económicas y empresariales. El objetivo es profundizar los contenidos del cálculo matemático del bachillerato de ciencias económicas y sociales más útiles en la asignatura de matemáticas.

Contenido:
Tema 1 - Desigualdades y gráficas de funciones
Resolución de inecuaciones lineales y cuadráticas. Técnica gráfica. Familias de funciones.
Tema 2 – Ingresos, costes y beneficios
2.1 – Ingresos, costes y beneficios: un caso real.
2.2 – Estudio del caso "costes lineales"
2.3 – Estudio del caso "costes cuadráticos"
Tema 3 - Problemas de modelización:
Construcción de modelos funcionales para el estudio de situaciones económicas o empresariales.

INGRESOS $I(x)$	**COSTES $C(x)$**
(1) $I(x) = 1{,}06\cdot x - 10$	**(a)** $C(x) = x/4 + 7$
(2) $I(x) = 3\cdot x + 2$	**(b)** $C(x) = 4\cdot x$
(3) $I(x) = x/100$	**(c)** $C(x) = 0{,}5\cdot x + 0{,}25$
(4) $I(x) = x^2 - 3{,}5$	**(d)** $C(x) = 2\cdot x$
(5) $I(x) = 5$	**(e)** $C(x) = x^2 + 2\cdot x - 1$
(6) $I(x) = x^2 - 3\cdot x$	**(f)** $C(x) = 0{,}5\cdot x^2 + 4{,}5\cdot x + 9$
(7) $I(x) = (x + 2)^2 - 4$	**(g)** $C(x) = (x + 1)\cdot(x + 3)$
(8) $I(x) = x^2 + 4\cdot x$	**(h)** $C(x) = 0{,}03\cdot(x + 1)^2 + 3$
(9) $I(x) = \frac{1}{4}\cdot x^2$	**(i)** $C(x) = 0{,}5\cdot x^2 + 2\cdot x$
	(j) $C(x) = (x + 1)^2 + 1$
(10) $I(x) = 3\cdot(x + 10) - 30$	**(k)** $C(x) = x^2 + 2{,}5\cdot x + 1{,}5$
(11) $I(x) = 0{,}5\cdot(x - 5)^2 - 12{,}5$	**(l)** $C(x) = \frac{2}{5}\cdot x + 2$
(12) $I(x) = (x - 1)^3$	
(13) $I(x) = 2\cdot(x - 1)^3 - 2$	**(m)** $C(x) = 0{,}02\cdot(x + 1)^2 + 5$
…	…
(36) $I(x) = \frac{1}{x + 2} + x^2 - 2$	**(jj)** $C(x) = 0{,}1\cdot x^2 + 5$

Ejercicio 1:
El coste de fabricación de un artículo por la producción de x unidades viene dado por la función: $C(x) = x^2 + 100x$
(a) *Representa la función gráficamente.*
(b) *Para que producciones el coste es nulo?*
(c) *Dar la expresión general de la función de ingresos para la venta de x unidades de x unidades del articulo si el precio de venta es de 120 € por unidad. Representad la función de ingresos juntamente con la de costos.*
(d) *¿Qué cantidades tiene que producir la empresa para tener beneficios positivos? Indicad en la gráfica que producciones permiten obtener más beneficios.*
(e) *Repetir los apartados anteriores si la empresa se ve forzada a añadir un coste constante de mantenimiento de la maquinaria de 50 €. ¿Cómo influyen este hecho en la función de costes? ¿Cómo se ven afectados los beneficios?*

Ejercicio 2:
Repetir el problema anterior con la función de costes: $C(x) = 2x^2 - 3x + 1$ considerando un precio unitario inicial de 12 €.
Explicar gráficamente qué cambios se producen en la función de ingresos si los precios son ahora de 15 € por unidad? ¿Cómo cambian los beneficios? ¿Y si los precios son de 10 € por unidad?

¿Cómo ganar 1000 € vendiendo camisetas?

Un grupo de alumnos de 2º de bachillerato han decidido estampar y vender camisetas en la fiesta mayor del barrio para financiarse el viaje de fin de curso. Tienen datos de sus compañeros de cursos anteriores. De momento, saben que, en los años anteriores, se tenía que pagar 150 € al ayuntamiento por el alquiler del "stand" de la feria.
Os piden que les ayudéis a determinar una estrategia para poder recoger unos 1000 € de beneficios.

Curso	03/04	03/04	03/04	04/05	04/05
Ventas Camisetas	70	180	120	243	160
Costes Totales	325	600	450	757.5	550
Ingresos Totales	280	720	480	972	640

POSTER

"CURSOS CERO" O "PROPEDÉUTICOS"
La universidad española pone en marcha nuevos dispositivos didácticos para facilitar el paso de Secundaria a la Universidad

Coincidiendo con la llegada a la universidad de las generaciones de la reforma educativa (1999), un gran número de universidades puso en marcha en septiembre unos cursos de matemáticas de corta duración para "preparar" la entrada en la universidad de los nuevos estudiantes.
Su principal objetivo es "nivelar" los contenidos matemáticos que se estudian en Secundaria o "completándolos" con aquellos que se consideran imprescindibles para cursar las asignaturas del primer ciclo universitario.

Las investigaciones llevadas a cabo en la TAD sobre las **discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y el primer ciclo universitario** (Fonseca 2004; Bosch, Fonseca y Gascón 2004) han puesto en evidencia la atomización y rigidez del bagaje matemático con el que los alumnos llegan a la universidad, atribuyéndolas a lo que se ha definido como una "incompletidud" de las OM que se estudian en Secundaria.

Esta incompletitud matemática estaría relacionada con una "incompletitud didáctica" debida a la poca realización de algunos momentos del proceso de estudio y a la ausencia de un cuestionamiento inicial que los motive.

Las matemáticas de Secundaria aparecen así como una yuxtaposición de organizaciones *puntuales* y "rígidas", que consisten básicamente en aplicar técnicas predeterminadas a tareas aisladas, con un entorno tecnológico-teórico limitado que asume una función meramente descriptiva y resulta poco operativo para justificar el uso de las técnicas, evaluarlas, desarrollarlas y conectarlas entre sí.
→ Se plantea entonces la necesidad de diseñar nuevos dispositivos didácticos que, atendiendo a las restricciones actuales de la enseñanza secundaria, permitan – por lo menos localmente – poner en marcha procesos de estudio en los que se vivan los diferentes momentos didácticos y que, partiendo de una cuestión problemática inicial con sentido y pertinencia para el grupo de alumnos, conduzcan a la construcción de organizaciones matemáticas *locales relativamente completas* como respuesta a dicha cuestión.

TECNOLOGÍA DIDÁCTICA IMPLÍCITA: *"Las matemáticas básicas son esas, no hay otras. Y son las mismas para todas las carreras."*

Gran aislamiento de las OM: no aparece una organización temática durante las sesiones, ni un programa global que se vaya recorriendo explícitamente.

De los cursos observados consideramos dos tipos diferenciados

Tanto el curso como el trabajo realizado en cada sesión partían de unos **objetivos y** de **un programa claramente explicitado** y que se presentaba a los alumnos, siendo objeto de una evaluación final.

TECNOLOGÍA DIDÁCTICA IMPLÍCITA: *"Lo importante es que los alumnos dominen las nociones y técnicas básicas del curso que va a empezar."*

Bombardeo de recordatorios de técnicas y tecnologías (compuestas de definiciones, ejemplos y propiedades), en el que los ejercicios sólo sirven como ilustración de las tecnologías y manejo de las técnicas.

Curso 1
ETERNO MOMENTO EXPLORATORIO

Curso 2
DESFILE DE OM

Enfoque "tecnicista-teoricista": el profesor presenta los ingredientes de las OM que el alumno debe saber activar, con algunos ingredientes tecnológicos como soporte a su discurso.

Poca conexión con asignaturas de la carrera

TECNOLOGÍA DIDÁCTICA IMPLÍCITA: *"Para resolver problemas primero hay que saber la teoria"*

Presentación del profesor: "*Primero os daré nociones teóricas y luego haréis problemas*".

***Topos* profesor-alumno muy diferenciado**:
- El alumno tiene un dossier de ejercicios para ir realizando, que se le corrigen y entregan posteriormente, así como una prueba final individual.
- En clase el peso principal del trabajo recae sobre el profesor que realiza, en mayor parte, una presentación discursiva-ostensiva de las tecnologías y técnicas de cada OM.

A PESAR DE LAS DIFERENCIAS ENTRE LAS DOS O.D. OBSERVADAS, HAY PUNTOS COMUNES:
Se presentan y trabajan con los alumnos una gran cantidad de OM puntuales distintas.
Hay una desaparición absoluta de los problemas, sólo se hacen cálculos o resuelven ejercicios aislados.

HIPÓTESIS: se acentúa el carácter aislado de las OM de S

En Secundaria se representan funciones y se resuelven inecuaciones algebraicamente. En el taller se propone **utilizar las gráficas** para resolver ecuaciones e inecuaciones

Propuesta de taller experimentado en septiembre 2005

Para resolver las cuestiones, las gráficas son un medio para llegar a la solución. De ahí la necesidad de construir una técnica de representación "rápida" y "fiable".

Objetivo
Articular OM puntuales de Secundaria a partir del estudio de algunas cuestiones problemáticas que los alumnos pueden abordar y para cuya resolución se necesita desarrollar algunas de las OM conocidas.
Contenido
Trabajar con una OM local en torno a las funciones elementales en el que las gráficas no sean el objetivo del estudio sino un medio para resolver un problema (que adquieran una funcionalidad).
Cuestión problemática inicial: comparación de una función de ingresos y otra de costes, conel objetivo de determinar el intervalo de producciones en el que se obtienen beneficios.
Se introduce una técnica gráfica basada en la representación de funciones básicas ($y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = 1/x$, $y = r^x$) y la deducción, por translaciones y homotecias, de las gráficas de las funciones elementales consideradas: $y = af(x - b) + c$.
El estudio empieza con la resolución de inecuaciones del tipo $I(x) > C(x)$.
La cuestión inicial se amplía hacia el estudio de un caso real: la venta de camisetas por parte de un grupo de alumnos para obtener un determinado beneficio.

Se intenta que los alumnos, individualmente o en grupo, trabajen en la máxima autonomía. El profesor introduce las cuestiones y la técnica inicial y colabora puntualmente en el trabajo de los alumnos mediante comentarios y correcciones, tanto de forma individual como en gran grupo.
Cae bajo la responsabilidad del profesor explicitar los discursos tecnológicos en la pizarra y presentar las técnicas que los alumnos deben utilizar inicialmente y que deberían ser capaces de desarrollar posteriormente por sí mismos.