TEMES CLAU 11

FONAMENTS DE CÀLCUL PER A L'ENGINYERIA

M. Rosa Estela Carbonell

UPC Edicions UPC
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Disseny de la coberta: Ernest Castelltort
Disseny de col·lecció: Tono Cristòfol
Maquetació: Mercè Aicart
Fotografia de coberta: Ignasi Villanueva

Primera edició: setembre de 2008

© M. Rosa Estela Carbonell, 2008

© Edicions UPC, 2008
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 1-3, 08034 Barcelona
Tel.: 934 137 540 Fax: 934 137 541
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
E-mail: edicions-upc@upc.edu

Producció: Barcelona Digital, S.L.
Rosselló 77
08029 Barcelona

Dipòsit legal: B- -2008
ISBN: 978-84-8301-969-6

Tota forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només pot ser realitzada amb l'autorització dels seus titulars, salvant l'excepció prevista per la llei. Dirigiu-vos a l'editor, si necessiteu fotocopiar o escanejar algun fragment d'aquesta obra.

"Vaig aprendre a aprendre per a poder ensenyar, i vaig aprendre a ensenyar per a poder aprendre"

Luis A. Santaló

A tots els estudiants que he tingut a les meves classes de Càlcul i a totes les persones que tinguin interès en llegir aquest llibre. De manera molt especial als meus fills Anna i Eduard, que ara ja el poden llegir i començar a entendre.

Índex

Pròleg

Aquest llibre està pensat per ser un material de suport bàsicament a les assignatures de Càlcul de primer curs de les titulacions d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports i d'Enginyeria Geològica, encara que creiem que aquest text serà d'interès per a qualssevol estudiant de primer curs d'Escoles Tècniques i Facultats de Ciències. No es tracta d'un llibre de Càlcul de primer curs universitari sinó que volem posar a l'abast dels estudiants un material de treball que sigui coherent amb els nous plans d'estudis i que els faciliti l'entrada als seus estudis universitaris. Volem que trobin en aquest llibre els conceptes de matemàtiques bàsics per entendre'n bé molts d'altres que els explicarem a la Universitat.

La meva experiència de molts anys en la docència, parlar amb els companys i amb els alumnes, ens ha fet veure que hi ha molts conceptes que els estudiants no tenen ben assolits, i el que potser ens preocupa més és que moltes vegades no saben on anar a buscar-los. En aquest sentit volem facilitar-los la feina i creiem que aquest llibre serà una bona eina d'estudi que servirà per millorar el seu rendiment en l'assignatura de Càlcul i en moltes altres de la titulació on estiguin ubicats els estudiants. Amb els comentaris de professors i estudiants he intentat recopilar tots aquells temes en què en un moment o un altre veiem que hi ha estudiants que tenen mancances. S'ha fet una prova donant material als estudiants, i com que la resposta per part d'ells ha estat molt positiva això m'ha motivat a posar-me de forma més seriosa i en format de llibre a treballar en aquesta línia.

Els objectius principals d'aquest llibre són donar a l'estudiant un material que li serveixi per consolidar conceptes que ha rebut en algun moment previ a la seva entrada a la universitat i explicar-ne amb detall d'altres que ha vist de forma molt simplificada.

Al llibre hi trobareu capítols que tenen conceptes que no s'han explicat mai a secundària però que hem cregut convenient afegir-los. Per exemple, les quàdriques (molt importants per a l'estudi del càlcul diferencial de diverses variables) i l'estudi del càlcul de primitives és més detallat del que els estudiants haurien de saber, però creiem que, per la seva importància en moltes assignatures tècniques, els anirà molt bé tenir-ne un estudi més ampli que els permeti cercar un major nombre de primitives. Ells poden entendre el que se'ls explica perquè les novetats bàsicament fan referència a la utilització de diferents canvis de variable (mètode conegut per la gran majoria d'estudiants de batxillerat).

En gairebé cada capítol s'hi ha inclòs una nota històrica perquè m'ha semblat interessant situar, encara que de manera molt breu, en perspectiva històrica els diferents conceptes que s'introdueixen. De la mateixa manera, he intentat fer referència a curiositats relacionades amb les matemàtiques sempre que he pogut per tal de fer el llibre més atractiu intentant no perdre en cap moment el rigor matemàtic.

El llibre conté tres apèndixs (àlgebra, estadística bàsica i progressions de nombres reals) de conceptes a vegades relacionats amb el càlcul i que hem cregut interessants. Per exemple, al capítol 4 de geometria cartesiana, s'utilitza el teorema de Rouché-Frobenius i el llenguatge de matrius que està explicat a l'apèndix d'àlgebra.

Aquest llibre no és un llibre de problemes, tot i que hi ha alguns exemples que intenten aclarir els conceptes que es van definint. Veureu que es fa rerència a programes de càlcul informàtic com WIRIS, MAPLE i INTEGRATOR, com un exemple dels molts que existeixen. L'ús d'aquestes eines informàtiques permet que l'estudiant tingui un llibre de problemes fet a mida, en el sentit que es pot plantejar el problema que li interessi en un determinat moment i amb aquests programes pot obtenir la solució analítica o bé les representacions gràfiques que el poden ajudar a entendre el que està estudiant en un determinat moment. Hem cregut convenient posar en alguna ocasió les instruccions d'ús d'aquestes eines informàtiques que anem a comentar breument.

WIRIS és una eina de càlcul matemàtic que ofereix la Universitat Politècnica de Catalunya. Aquest és un servei de càlcul matemàtic, accessible per Internet i en català, desenvolupat íntegrament per Maths for More. Hi podeu accedir a la pàgina `http://www.wiris.net/upc.edu` (per calcular control+enter o bé la fletxa vermella). La manera d'expressar els càlculs i els resultats és un llenguatge fidel a la notació habitual en matemàtiques, cosa que els fa intuïtius per a alumnes i professors. I la fa una eina ideal per a la docència de les matemàtiques ja que, a més, incorpora facilitats per a la generació de material educatiu en línia de manera àgil.

INTEGRATOR és una eina de càlcul realitzada amb Mathematica i que trobareu a l'adreça `http://integrals.wolfram.com`. Permet el càlcul de funcions primitives, simplement introduint la funció que volem i prement Enter.

MAPLE és un projecte del Symbolic Computation Group de la Universitat de Waterloo a Ontario, Canadà i està format per un nucli reduït d'instruccions elementals molt optimitzades i ja precompilades. Presenta un Help molt complet i té cinc tipus bàsics d'operacions: les simbòliques, les gràfiques, les numèriques, les d'entrada i sortida i les d'ajut.

Vull fer públic el meu agraïment, en primer lloc a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona per la concessió de l'ajut de la Convocatòria d'Ajuts a Projectes d'Innovació Educativa i Elaboració de Material Docent 2001, que ha fet possible la redacció d'aquest llibre. A l'estudiant Juan Murcia Delso perquè ell ha realitzat l'edició d'aquest text i els diferents gràfics i figures que hi apareixen. He disfrutat escrivint aquest llibre i ell m'ha posat la feina molt fàcil. Moltes gràcies Joan. El meu agraïment a Eusebi Jarauta Bragulat que n'ha llegit tota la versió preliminar i ha fet suggeriments i observacions que m'han permès millorar molt el text.

El meu agraïment a Sebastià Xambó Descamps pels seus gràfics que fan referència a les seccions de les quàdriques. A Pedro Diez Mejía, per les il·lustracions del Palau Geraci. A Juan Murcia Vela, per les fotografies del projecte d'enginyeria civil d'una passarel·la en forma de paraboloide hiperbòlic. A Ramon Eixarch Ferrer, per la seva amable col·laboració en tot el que fa referència a WIRIS. A les meves amigues Alba i Sara Tegido, per la fotografia del pont de Brooklyn. A Carla Romeu, perquè ens ha ajudat a fer els gràfics de les còniques. A la Junta Constructora del Temple de la Sagrada Família i a la Reial Càtedra Gaudí per la seva col·laboració. A Xevi Roca i Agustí Medina, perquè m'han resolt tots els problemes tècnics. Al meu marit Salvador López Forment, perquè sempre he tingut el seu suport.

Vull agrair molt especialment als meus exalumnes ara ja Enginyers de Camins, Canals i Ports, Xavier Gisbert Martín de Hijas i Juan Murcia Delso, que hagin acceptat escriure una breu història del Càlcul com a introducció d'aquest llibre. Ells són un exemple dels molts estudiants de qui tinc un bon record.

Vull donar les gràcies a tots els professors i estudiants que m'han fet arribar els seus comentaris sobre aquest text, fet que ha permès millorar el llibre en aquesta tercera edició. Una menció especial per Mónica Blanco Abellán, Jaume Fabregat Fillet, Marta Ginovart Gisbert, Joel Saà Seoane i Anna Serra Tort, agraint molt els seus comentaris. Qualsevol comentari al voltant d'aquest llibre serà molt ben rebut.

Entre la primera i la segona edició d'aquest llibre hem treballat en el projecte d'innovació docent EVAM (Eina Virtual d'Autoaprenentatge de les Matemàtiques), que podeu trobar a l'adreça `http://www.wiris.net/upc.edu/collection/`. Aquest projecte està estretament relacionat amb els continguts del llibre "Fonaments de Càlcul" i consisteix bàsicament en la elaboració de material docent d'autoaprenentatge utilitzant la xarxa i la tecnologia WIRIS per al desenvolupament d'activitats interactives. L'hem desenvolupat personal docent i investigador de diversos centres docents de la UPC: Marta Ginovart, Eusebi Jarauta, Sebastià Xambó i ha estat coordinat per mi mateixa. Una de les principals avantatges del projecte EVAM és la interactivitat, fet que permet a l'estudiant resoldre en cada moment el problema que està tractant. Animem al lector a utilitzar-lo i estem convençuts de que ajudarà a entendre els conceptes que s'introdueixen en aquest llibre.

Per últim vull agrair a Edicions UPC l'edició d'aquest llibre i la bona acollida que sempre m'han dedicat. Moltes gràcies a tots.

Barcelona, Maig del 2008 M. Rosa Estela

Introducció històrica als inicis del Càlcul

Actualment, no hi ha dubte que el Càlcul Infinitesimal és una de les invencions més importants en la història de les Matemàtiques. S'atribueix el mèrit a Newton (1642-1727) i a Leibniz (1646-1716), però hi va haver altres matemàtics de l'època que van jugar un paper important en el seu desenvolupament. Els orígens del Càlcul daten del segle XVII, quan es van plantejar una sèrie de problemes, tots ells relacionats amb la geometria. Podem agrupar aquests problemes en quatre grans grups. Són els següents:

1. La determinació de la velocitat i l'acceleració d'un cos, coneguda l'expressió de la distància en funció del temps. Apareix en aquest tipus de problema el concepte de "pas al límit" com a superació del "quocient incremental". També es planteja el problema invers: trobar la velocitat i la posició d'una partícula a partir de l'acceleració. L'exemple més representatiu d'aquesta classe de problemes és el d'una massa sotmesa a l'acció de la gravetat.

2. Un altre problema clàssic de l'època era trobar la tangent d'una corba. L'interès d'aquest problema no era només matemàtic, ja que tenia un gran àmbit d'aplicació en la física, concretament en l'òptica (llei de reflexió, refracció).

3. Trobar el màxim o el mínim d'una funció o corba, és a dir, un problema d'optimització. L'exemple més paradigmàtic és potser el tir parabòlic: en el llançament d'un objecte, amb igualtat de velocitats inicials, quin és l'angle per al qual la distància horitzontal recorreguda es màxima? Aquest problema va motivar l'estudi de molts matemàtics durant el segle XVII.

4. Per últim, tenim els problemes relacionats amb corbes: trobar la longitud d'una corba, determinar l'àrea entre dues corbes, el volum entre dues superfícies, el centre de gravetat d'un cos, etc. El gran treball realitzat per Arquímedes (287-212 a.C.) en aquest àmbit de les Matemàtiques va obrir el camí per als matemàtics del segle XVII.

Com hem esmentat molts van ser els que van contribuir sens dubte a l'aparició del Càlcul en l'afany de resoldre els problemes enumerats: des dels grecs fins a Fermat (1601-1665), Descartes (1596-1650), Kepler (1571-1630) o Barrow (1630-1677). Però les figures que van establir les seves bases i van arribar a generalitzar més els conceptes relacionats van ser Newton i Leibniz.

Newton va partir d'un enfocament físic, donant resposta als problemes que ell mateix havia observat o s'havia plantejat. Va introduir el concepte de *derivada* definint-la com la velocitat d'un mòbil que es mou per una corba $f(x,y)=0$, on x i y són funcions del temps. Així doncs, la velocitat eren les derivades de x i y respecte al temps, i obtenia també d'aquesta manera la tangent d'una corba. Es va plantejar també el problema invers, és a dir, trobar la corba $y=y(x)$ a partir del pendent de la corba, i també el càlcul de l'àrea sota una corba donada per una funció contínua. Pel que fa als problemes de màxims i mínims, va establir que la derivada era nul·la en els extrems.

Si l'enfocament de Newton era el de la física, Leibniz va partir del camp de la filosofia, i a ell se li ha d'atribuir el mèrit de crear un llenguatge formal del Càlcul. Un concepte bàsic en les seves teories tant matemàtiques com filosòfiques era el d'*infinitèsim*, que tot i que era una idea molt poc precisa, la podríem definir com una unitat infinítament petita. D'aquí parteix la seva idea de derivada, definint-la com el quocient entre infinitèsims

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx},$$

on dx és una magnitud infinítament petita. Igual que Newton, tracta els diferents problemes establerts (tangents, àrees sota corbes, etc.) a partir del seu concepte de derivada.

És interesant adonar-se que tots dos van arribar a resultats molt semblants de forma paral·lela seguint camins no tan semblants. Les diferències entre un i l'altre es fonamenten en la manera d'enfocar la qüestió: Newton intentava comprendre la naturalesa i la física, mentre que Leibniz perseguia uns objectius més teòrics, orientats cap a la filosofia.

El concepte de derivada de Newton té sentit com a quocient incremental d'una funció contínua, mentre que per a Leibniz és el quocient d'infinitesimals. El primer resolia els problemes d'àrees i volums amb les derivades de la funció (velocitat de variació), mentre que l'altre utilitzava sumes d'infinitésims. D'aquesta manera es pot entendre que la integral de Newton fos indefinida i la de Leibniz definida.

Newton va arribar a solucions per a problemes concrets i pràctics, mentre que Leibniz va ser capaç de generalitzar més les seves teories. D'aquesta manera, ens van aportar una visió més clara de la naturalesa i l'ús d'un llenguatge matemàtic formal, respectivament. Però, per sobre de tot, van saber crear a partir d'una sèrie de problemes una eina general per abordar-los tots i que és imprescindible avui dia: el Càlcul.

Xavier Gisbert Martín de Hijas
Juan Murcia Delso

1 Nocions bàsiques

Aquest primer capítol és una recopilació de les nocions i símbols que apareixen en el llenguatge matemàtic. Suposem que aquests símbols o conjunts són coneguts pels estudiants, però hem cregut convenient fer-ne una recopilació ja que d'ara endavant seran part del nostre llenguatge.

Fig 1.1 Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Ja hem comentat a la presentació històrica del càlcul que Leibniz està considerat un dels inventors del càlcul.

Leibniz tenia tant de filòsof com de matemàtic, i potser per això la seva contribució més important a la matemàtica, a part del càlcul, va ser en el camp de la lògica. El que més li impressionava del càlcul era el caràcter d'universalitat que presentava, i aquesta mateixa idea fonamental la va aplicar a tots els seus treballs. Leibniz pretenía reduir totes les coses a un ordre, i així, per poder reduir totes les discussions lògiques a una forma sistemàtica, volia desenvolupar una *característica universal* que fos com una àlgebra de la lògica.

El seu primer treball matemàtic va consistir en una tesi sobre anàlisi combinatòria que es va escriure el 1666, i ja a aquesta edat va tenir les primeres idees del que podria ser una lògica formal simbòlica. S'haurien d'introduir uns símbols universals per a un petit nombre de conceptes fonamentals necessaris per al pensament, i a partir d'aquest *alfabet* dels pensaments humans, construir les idees construïdes de la mateixa manera com es construeixen les fórmules en matemàtiques.

1.1 Llenguatge formal i simbologia

Itàlia va prendre una part menys activa en el desenvolupament de l'àlgebra abstracta que França, Alemanya i Anglaterra, però al llarg dels últims anys del segle XIX hi va haver matemàtics italians que es van interessar profundament per la lògica matemàtica. El més conegut de tots ells és Giuseppe Peano (1858-1932). A la seva obra *Formulaire de mathématique* (de 1894 endavant) va intentar desenvolupar un llenguatge formal amb el qual poder expressar no només la lògica matemàtica, sinó també totes les branques més importants de la matemàtica. El fet que el seu programa interessés molts dels seus col·laboradors i deixebles era degut bàsicament al fet que evitava tant les qüestions com el llenguatge metafísic, i sobretot a la seva encertada i senzilla elecció del simbolisme, on hi havia per exemple els símbols $\in$ ("pertany a la classe"), $\cup$ (suma lògica o reunió), $\cap$ (producte lògic o intersecció), $\supset$ ("conté"), etc., molts dels quals es fan servir actualment.

1.1.1 Conjunts numèrics

Nom	*Símbol*	*Definició o descripció*
Naturals	$\mathbb{N}$	$\{0,1,2,3,...\}$
	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}-\{0\}$
Enters	$\mathbb{Z}$	$\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$
	$\mathbb{Z}^*$	$\mathbb{Z}-\{0\}$
	$\mathbb{Z}^+$	$\{1,2,3,...\}$
	$\mathbb{Z}^-$	$\{...,-3,-2,-1\}$
Racionals	$\mathbb{Q}$	$\{x\in\mathbb{R}:\ x=\frac{a}{b}$ on $a,b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0\}$
	$\mathbb{Q}^*$	$\mathbb{Q}-\{0\}$
	$\mathbb{Q}^+$	$\{x\in\mathbb{Q}:\ x>0\}$
Reals	$\mathbb{R}$	Conjunt de nombres racionals i irracionals
	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}-\{0\}$
	$\mathbb{R}^+$	$\{x\in\mathbb{R}:\ x>0\}$
Irracionals	$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$	Nombres tal que la seva representació decimal no és finita i no es repeteix
Interval tancat	$[a,b]$	$\{x\in\mathbb{R}:\ a\leq x\leq b\}$
Interval obert	(a,b)	$\{x\in\mathbb{R}:\ a<x<b\}$
Interval semiobert	$[a,b)$	$\{x\in\mathbb{R}:\ a\leq x<b\}$
Intervals infinits	$[a,+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}:x\geq a\}$
	$(-\infty,b)$	$\{x\in\mathbb{R}:x<b\}$
Complexos	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

És probable que en llibres de matemàtiques trobeu la notació $]a,b[$ fent referència a un interval obert, equivalent a (a,b), que és la notació que nosaltres farem servir.

Val a dir que hi ha sectors on $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, $\mathbb{Z}^+=\{0,1,2,3,...\}$, $\mathbb{Z}^-=\{...,-3,-2,-1,0\}$, $\mathbb{Q}^+=\{x\in\mathbb{Q}:\ x\geq 0\}$, $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}:\ x\geq 0\}$.

1.1.2 Símbols bàsics

Símbol	*Significat*	*Exemple*
$\in$	pertinença a un conjunt	$a\in A$
$\notin$	no-pertinença a un conjunt	$a\notin A$
$=$	igualtat	$A=B$
$\neq$	desigualtat	$a\neq b$
$\subset$	inclusió de conjunts	$A\subset B$
$\subseteq$	inclusió o igualtat de conjunts	$A\subseteq B$
$\not\subset$	no-inclusió de conjunts	$A\not\subset B$
$\emptyset$	conjunt buit	$A=\emptyset$
$\cup$	unió de conjunts	$A\cup B$
$\cap$	intersecció de conjunts	$A\cap B$

Símbol	*Significat*	*Exemple*
$\times$	producte cartesià	$A \times B$
$<$	menor que	$x < y$
$\leq$	menor o igual que	$x \leq y$
$>$	major que	$x > y$
$\geq$	major o igual que	$x \geq y$
$\{\cdots\}$	conjunt d'elements	$\{a,b\}$
$\mid$	tal que	$a \in A \mid a \geq b$
$-$	diferència de conjunts	$A - B$
$\mathscr{C}_E(\cdot)$	complementari d'un conjunt	$\mathscr{C}_E(A) = E - A$

1.1.3 Quantificadors

Símbol	*Significat*	*Exemple*
$\forall$	per a tot	$\forall a \in A$
$\exists$	existeix	$\exists a \in A$
$\exists!$	existeix i és únic	$\exists! a \in A$
$\nexists$	no existeix	$\nexists a \in A$

1.1.4 Connectors lògics

Símbol	*Exemple*	*Significat*
$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$	p implica q
$\Leftarrow$	$p \Leftarrow q$	q implica p
$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$	p es compleix si, i només si, es compleix q (p implica q i q implica p)
$\neg$	$\neg p$	no es compleix p
$\wedge$	$p \wedge q$	es compleix p i q
$\vee$	$p \vee q$	es compleix p o q

1.2 Alfabet grec

El llenguatge matemàtic està molt relacionat amb l'alfabet grec i, com que és habitual que l'estudiant de batxillerat no identifiqui correctament les lletres amb el seu nom, hem cregut convenient i interessant recordar-lo.

Nom	*Lletra minúscula*	*Lletra majúscula*
alpha	α	A
beta	β	B
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
èpsilon	ε	E
zeta	ζ	Z

Nom	*Lletra minúscula*	*Lletra majúscula*
eta	η	H
theta	θ	Θ
iota	ι	I
kappa	κ	K
lambda	λ	Λ
mu, mi	μ	M

Nom	*Lletra minúscula*	*Lletra majúscula*
nu, ni	ν	N
xi	ξ	Ξ
òmicron	o	O
pi	π	Π
rho	ρ	P
sigma	σ	Σ

Nom	*Lletra minúscula*	*Lletra majúscula*
tau	τ	T
ípsilon	υ	Υ
phi	φ	Φ
chi	χ	X
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω

2 Mètodes de raonament i demostració

Com ja hem comentat al pròleg, en aquest llibre bàsicament hi trobarem definicions, propietats i teoremes que fan referència a temes bàsics i fonamentals del Càlcul. No hi trobarem les demostracions dels teoremes i propietats, llevat del raonament en algun exemple que ens ha semblat didàctic. És important, però, que un estudiant de Càlcul tingui clar els diferents mètodes de demostració, entenent que una demostració és el procés de deducció que permet deduir de les definicions, mitjançant regles de deducció matemàtica, un cert teorema, lema, proposició o corol·lari determinat.

Abans d'exposar els diferents mètodes de demostració, una petita ressenya històrica ens permetrà situar-los en el temps.

A finals del segle XIX Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1845-1918) i Giuseppe Peano (1858-1932) van establir els fonaments del sistema dels nombres reals, i això es va aconseguir amb l'estudi del sistema numèric més bàsic: el sistema dels nombres naturals. El matemàtic italià Giuseppe Peano va triar per a la seva fonamentació de l'aritmètica tres conceptes primitius: *zero*, *nombre* (és a dir, nombre natural o enter no negatiu), i la relació binària *és el següent de*, que verifiquen els següents cinc postulats:

1. Zero és un nombre.
2. Si a és un nombre, aleshores el següent de a també és un nombre.
3. Zero no és el següent de cap nombre.
4. Si els següents de dos nombres són iguals, aleshores els nombres mateixos són iguals.
5. Si un conjunt de nombres S conté el zero i també el següent de qualsevol nombre que pertanyi a S, aleshores tot nombre pertany a S.

Aquesta última condició és el principi d'inducció completa. Els axiomes de Peano, que van aparèixer formulats per primera vegada l'any 1889 a l'obra *Arithmetices principia nova methodo exposita*, representen l'intent més notable del segle per reduir l'aritmètica usual a l'estricte simbolisme formalitzat. (Peano va expressar els seus axiomes en simbolisme formal, i no amb paraules de llenguatge corrent, tal com hem fet nosaltres.)

2.1 Proposicions i implicacions

Totes les demostracions i raonaments matemàtics es fonamenten en **proposicions**. Una proposició és un enunciat declaratiu o cadena de símbols intel·ligibles que es pot qualificar com a certa o falsa, i que no pot ser certa i falsa a la vegada (principi d'exclusió). Una **tautologia** és una proposició que sempre és certa, per exemple "$1 = 1$". Una **contradicció** és una proposició que sempre és falsa, per exemple "$0 = 1$".

Perquè una proposició sigui totalment clara és necessari que se n'hagi establert el context adient i s'hagi definit correctament el significat dels signes.

Diem que dues proposicions p i q són **equivalents** si p és certa estrictament quan q és certa (per tant p és falsa estrictament si q és falsa). En aquest cas la notació utilitzada és: $p \equiv q$.

Si p és una proposició, aleshores la seva **negació** és la proposició "no p" que és certa quan p és falsa i és falsa quan p és certa. Notació: $\neg p$.

Si p i q són proposicions, aleshores la seva **conjunció** és la proposició "p i q", que és certa quan p i q són certes alhora i és falsa en la resta de casos. Notació: $p \wedge q$.

Així mateix, la **disjunció** de p i q és la proposició "p o q", que és certa si com a mínim una de les proposicions p i q és certa, i és falsa quan ambdues són falses. Notació: $p \vee q$.

Les **lleis de De Morgan** relacionen la negació, conjunció i disjunció:

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$

Una manera molt important de formar una nova proposició a partir de proposicions donades és la **implicació** que s'escriu $p \Rightarrow q$,"si p aleshores q" o "p implica q". En aquest cas, p és la **hipòtesi** i q és la **conclusió** de la implicació.

La implicació $p \Rightarrow q$ és equivalent a la implicació

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

que rep el nom de **contrarecíproc** de la implicació $p \Rightarrow q$.

Si tenim una implicació $p \Rightarrow q$, llavors també es pot formar la proposició $q \Rightarrow p$, que rep el nom de **recíproc** de $p \Rightarrow q$. Observem que el contrarecíproc és un equivalent lògic de la implicació, però el recíproc no ho és.

La **doble implicació** (o **bicondicional**) s'escriu com "$p \Leftrightarrow q$" o "p si i només si q" i es defineix com

$$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Leftarrow q)$$

Observem que l'equivalència $p \Leftrightarrow q$ és certa quan les proposicions p i q són ambdues certes o ambdues falses.

2.2 Demostracions per contraexemple

Per demostrar que és fals que tot element x d'un conjunt donat A té una certa propietat, és a dir, per demostrar que un enunciat del tipus

$$(\forall x \in A) \Rightarrow p(x)$$

és fals, només cal presentar-ne un contraexemple (és a dir, un element particular x_0 del conjunt que no tingui aquesta propietat).

$$(\exists x_0 \in A) \mid \neg p(x_0)$$

Exemple 2.2.1 *Demostreu que la composició de funcions no és commutativa, és a dir, és fals que*

$$g \circ f = f \circ g$$

Demostració. Considerem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = x^2$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per $g(x) = \cos x$.

Aleshores,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \cos x^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\cos x) = (\cos x)^2$$

Com que hem trobat f i g particulars tals que

$$g \circ f \neq f \circ g$$

podem dir que en general no és cert que $g \circ f = f \circ g$ q.e.d.

Observació: "q.e.d" es refereix a *quod erat demostrandum*, expressió en llatí que vol dir: "el que volíem demostrar" i s'acostuma a escriure quan una demostració ha finalitzat.

2.3 Demostracions directes

Siguin p i q proposicions. La **demostració directa** de $p \Rightarrow q$ requereix la construcció d'una cadena de proposicions $r_1, r_2, \cdots, r_n$ tal que

$$p \Rightarrow r_1,\ r_1 \Rightarrow r_2, \cdots, r_n \Rightarrow q$$

Exemple 2.3.1 *Si a i b són dos nombres reals positius aleshores la seva mitjana aritmètica és major o igual que la seva mitjana geomètrica; és a dir,*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Demostració. Si $a, b > 0 \Rightarrow \exists\, a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ tals que $a = a_1^2$ i $b = b_1^2$

Per tant:

$$0 \leq (a_1 - b_1)^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 = a + b - 2\sqrt{ab} \Rightarrow 2\sqrt{ab} \leq a + b$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad \text{q.e.d.}$$

2.4 Demostracions indirectes

Existeixen bàsicament dos tipus de demostracions indirectes: les **demostracions pel contrarecíproc** i les **demostracions per contradicció** o **reducció a l'absurd**. Ambdues s'inicien amb la hipòtesi que la conclusió q és falsa.

Aquest tipus de demostracions són molt habituals, per exemple, en cas d'haver de demostrar la unicitat d'algun concepte.

2.4.1 Demostracions pel contrarecíproc

En lloc de demostrar $p \Rightarrow q$, es pot provar $\neg q \Rightarrow \neg p$. Aquest tipus de demostració és convenient quan hi trobem el quantificador universal.

Exemple 2.4.1 *Sigui* $a \geq 0$ *un nombre real. Si* $\forall \varepsilon > 0$, $0 \leq a < \varepsilon$, *aleshores* $a = 0$.

Demostració. Si $a \neq 0$, llavors com que $a \geq 0$ hem de tenir $a > 0$.
Escollim $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}a$, llavors tenim $\varepsilon_0 > 0$ i $\varepsilon_0 < a$, d'on deduïm que la hipòtesi $0 \leq a < \varepsilon \ \ \forall \varepsilon > 0$ és falsa. q.e.d.

Exemple 2.4.2 *Si m,n són nombres naturals tals que* $m + n \geq 10$, *aleshores* $m \geq 5$ *o* $n \geq 5$.

Demostració. Si la conclusió és falsa, llavors es compleix $m < 5$ i $n < 5$ (llei de De Morgan). Al sumar desigualtats, obtenim $m + n < 5 + 5 = 10$, per tant la hipòtesi és falsa. Així doncs, $m + n \geq 10$ si $m \geq 5$ o $n \geq 5$. q.e.d.

2.4.2 Demostracions per reducció a l'absurd

Per demostrar $p \Rightarrow q$ el mètode de reducció a l'absurd consisteix a suposar com a certa $\neg q$ (és a dir, suposar que q és falsa) i raonar lògicament fins a arribar a una contradicció amb la hipòtesi p. Quan passa això es diu que la contradicció prové de suposar que la tesi era falsa (o que l'absurd ha estat aquesta suposició).

Exemple 2.4.3 $\sqrt{2}$ *és un nombre irracional.*

Demostració. Suposem que $\sqrt{2}$ és un nombre racional. Aleshores $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ on p i q són enters primers relatius.

Per tant,

$$2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2 \text{ parell} \Rightarrow p \text{ parell (múltiple de 2)}$$

Així doncs, $p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$2q^2 = p^2 \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q \text{ parell (múltiple de 2)}$$

Per tant, p i q no són primers relatius. *Contradicció*.

Així doncs, $\sqrt{2}$ no pot ser un nombre racional i com que és un real, ha de ser irracional. q.e.d.

2.5 Demostració per inducció

El mètode de demostració per inducció és molt útil en cas de voler demostrar qualsevol fórmula que es compleixi per a tots els nombres naturals. La propietat més fonamental de $\mathbb{N}$ és el principi d'inducció, que veurem tot seguit.

Per demostrar que una proposició $p(n)$ és certa per a qualsevol nombre natural ($\forall n \in \mathbb{N}$), existeix el principi d'inducció que diu:

1. Si $p(1)$ és cert
2. Si per $n = k \;\; p(k)$ certa (hipòtesi d'inducció)$\Rightarrow \;\; p(k+1)$ certa

aleshores $p(n)$ és certa $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple 2.5.1 *Demostreu que*

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N},\; n \geq 1$$

Demostració.

1. Si $n = 1$, es compleix $1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$
2. Suposem que es compleix

$$1+2+\cdots+(n-1) = \frac{(n-1)n}{2} \quad \text{(hipòtesi d'inducció per k=n-1)}$$

   i volem veure que

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 1+2+\cdots+n &= 1+2+\cdots+(n-1)+n = \frac{(n-1)n}{2}+n = \\ &= \frac{(n-1)n+2n}{2} = \frac{n^2-n+2n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Les demostracions per inducció estan molt relacionades amb les definicions recursives i com un exemple de definició recursiva podem considerar la definició de a^n com

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^{n+1} &= a^n \cdot a \end{aligned}$$

2.6 Igualtat entre conjunts

Si volem demostrar que dos conjunts A i B són iguals, s'acostuma a utilitzar el mètode de la doble inclusió.

$$A = B \Leftrightarrow [A \subset B \text{ i } B \subset A]$$

Recordem que $A \subset B \Leftrightarrow \;[\,(\forall x \in A) \Rightarrow x \in B\,]$

Exemple 2.6.1 *Demostreu que*

$$A \cup (B \cap A) = A \quad \textit{(Llei de simplificació)}$$

Demostració.

$\subset$) Volem veure que $A \cup (B \cap A) \subset A$

$$\text{Si } x \in A \cup (B \cap A) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ \text{ó} \\ x \in B \cap A \Rightarrow x \in B \text{ i } x \in A \end{array} \right\} \Rightarrow x \in A$$

per tant, $A \cup (B \cap A) \subset A$.

$\supset$) Volem veure que $A \cup (B \cap A) \supset A$

Si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap A)$ per tant,

$$A \subset A \cup (B \cap A) \quad \text{q.e.d.}$$

2.7 Igualtat de funcions

Per demostrar que dues funcions $f : A \rightarrow B$ i $g : C \rightarrow D$ són iguals, hem de provar que:

1. $A = C$ i $B = D$
2. $(\forall x \in A) \;\; f(x) = g(x)$

3 Factors i desenvolupaments. Binomi de Newton

Fig 3.1 Isaac Newton (1642-1727)

L'epitafi de Newton, a l'Abadia de Westminster, a Londres, és la fórmula que expressa el binomi $a+b$ elevat a la potència m. La glòria més gran de Newton va ser obtenir, sobre la seva tomba, una fórmula algebraica.

Chafi Haddad

3.1 Productes i factors notables

Quadrat d'una suma:	$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$
Quadrat d'una diferència:	$(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$
Cub d'una suma:	$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
Cub d'una diferència:	$(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
Suma per diferència:	$(x+y)(x-y) = x^2-y^2$
Diferència de cubs:	$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$
Suma de cubs:	$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$

Exercici 3.1.1 *Trobeu l'error del raonament següent, suposant que $x = y$*

$$\begin{aligned}
x^2 &= xy \\
x^2 - y^2 &= xy - y^2 \\
(x+y)(x-y) &= y(x-y) \\
x+y &= y \\
2y &= y \\
2 &= 1
\end{aligned}$$

3.2 Binomi de Newton i coeficients binomials

Definició 3.2.1 *(Factorial) Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, definim el* **factorial de n** *com a*

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

El factorial per a $n = 0$ per conveni s'escriu

$$0! = 1$$

i això permet que moltes expressions tinguin una formulació més senzilla.

Definició 3.2.2 *(Binomi de Newton) Si $n \in \mathbb{N}$, llavors*

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

on els coeficients, que s'anomenen **coeficients binomials** *es defineixen com a*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{essent} \quad \begin{array}{l} n \geq k \geq 0 \\ k \neq 0,\ k \neq n \end{array}$$

Observem que alguns dels resultats de l'apartat 3.1 són casos particulars del binomi de Newton.

El desenvolupament de la fórmula del binomi es pot utilitzar per a altres valors de n (enters i racionals), i aleshores apareixen les sèries infinites.

Propietat 3.2.1 *(Propietats dels coeficients binomials)*

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

3. $\displaystyle\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

4. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = \binom{n}{0} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

5. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

6. $\displaystyle\sum_{l\ \text{senar}} \binom{n}{l} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}$

7. $\displaystyle\sum_{l\ \text{parell}} \binom{n}{l} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = 2^{n-1}$

De la tercera propietat es dedueix la configuració següent, que es coneix amb el nom de *Triangle de Pascal*.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Fig 3.2 Triangle de Pascal

que, tenint en compte la definició dels coeficients binomials, es pot escriure com:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Fig 3.3 Triangle de Pascal

Observem que cada nombre, llevat dels que trobem als costats del triangle (que tenen valor 1), és la suma dels dos nombre que té just al damunt.

La primera vegada en la història de les matemàtiques que apareix el triangle aritmètic és al segle XIII en les obres del matemàtic xinès Yang Hui. Més endavant apareix publicat a *Mirall preciós dels Quatre Elements* de Chu Shih-Chieh (matemàtic xinès de finals del segle XIII, principis del segle XIV).

El *Mirall Preciós* (escrit al 1303) comença amb un diagrama del triangle aritmètic. En aquest diagrama apareixen els coeficients dels diferents desenvolupaments binomials fins a la vuitena potència. Sembla que aquest teorema també el coneixia Omar Khayyam (s. XII) però l'obra àrab més antiga que l'inclou data del segle XV i està escrita per Al-Kashi. Alguns historiadors diuen que es tracta de descobriments independents perquè les comunicacions entre Xina i Aràbia no eren gaire intenses, encara que existia la ruta de la seda que connectava Xina amb Pèrsia, i la informació científica s'hi podria haver infiltrat.

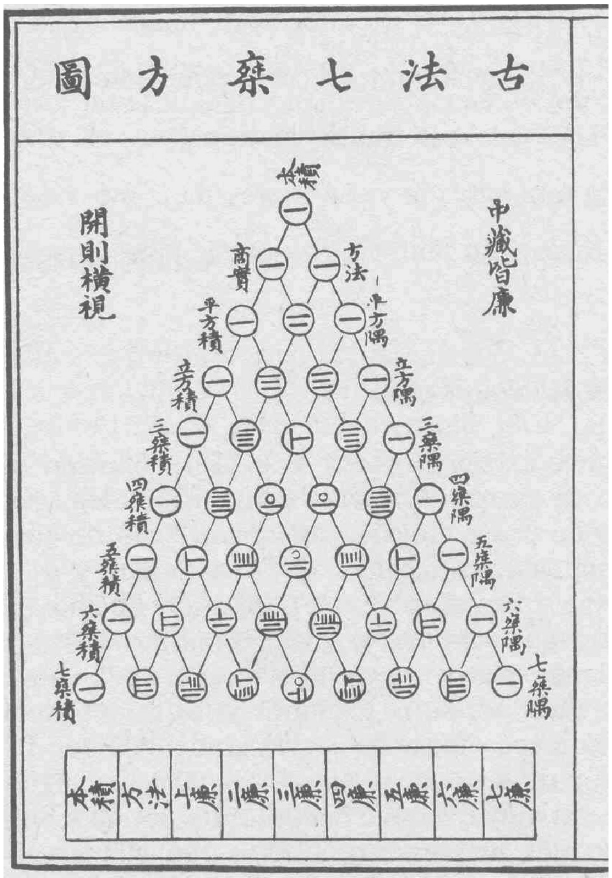


Fig. 3.4 El *triangle de Pascal* tal com apareix al *Ssu Yuan Yii Chien* de Chu Shih-Chieh, de l'any 1303

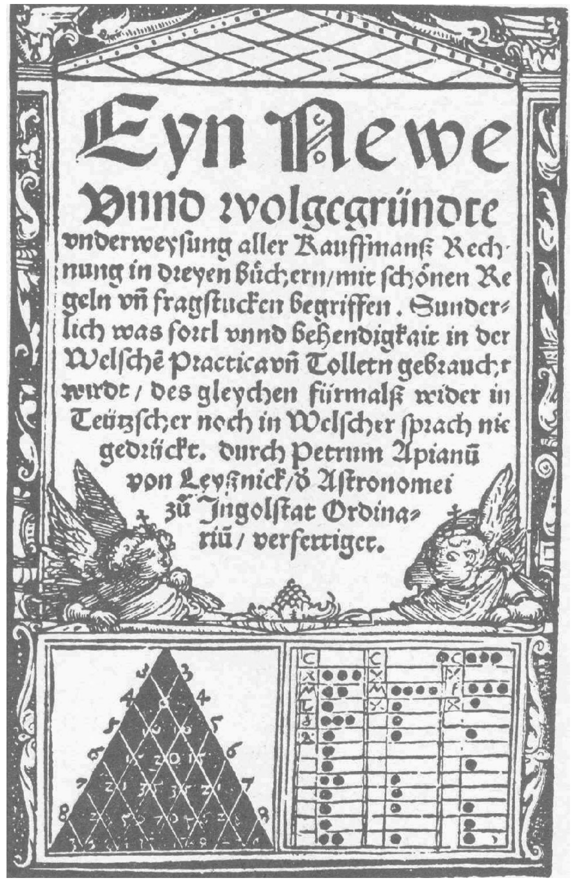


Fig. 3.5 Portada de l'*Aritmètica* de Peter Apian

Al *Rechnung* de Peter Apian (1527) apareix imprès a la portada el triangle aritmètic, gairebé un segle abans del naixement de Pascal. A l'*Aritmètica íntegra* (1544) de Michael Stifel també s'inclou el triangle aritmètic, i és important bàsicament per a l'estudi dels nombres negatius, les arrels i les potències.

Al *General Tratatto*, escrit a mitjans del s. XVI per *Tartaglia* (sobrenom de Niccolo Fontana), apareixen les dotze primeres potències dels nombres combinatoris (i és per això que aquest triangle també s'anomena *triangle de Tartaglia*).

Blaise Pascal (al 1654) va estudiar moltes propietats d'aquest triangle i va relacionar l'estudi de les probabilitats amb el triangle aritmètic. Des de llavors, aquesta distribució triangular s'anomena *triangle de Pascal*.

I com és que al desenvolupament

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

se l'anomena binomi de Newton?

Newton, en dues cartes a Henry Oldenborg (1615-1677), secretari de la Royal Society, va generalitzar aquest desenvolupament a exponents fraccionaris. Al *Tractat del triangle aritmètic* de Pascal es veu que Pascal ho coneixia i ho aplicava (només per a exponents positius), però és probable que tal com diu Carl B. Boyer a la referència [9], com que Pascal no coneixia la notació exponencial introduïda per Descartes, no va poder formalitzar la generalització a exponents fraccionaris.

Per obtenir el teorema binomial, Newton no va procedir directament a partir del triangle de Pascal, sinó d'una manera indirecta a partir d'un problema de quadratures.

4 Geometria cartesiana

La geometria analítica (també anomenada cartesiana) és la branca de la geometria que relaciona posicions amb representacions numèriques, anomenades coordenades. Va nèixer a la primera meitat del s. XVII i va establir una relació entre les corbes del pla i les equacions algebraiques amb dues incògnites. A principis del 1600, un grup de matemàtics van veure la idea de la geometria analítica, però van ser dos, en particular, els que van veure la possibilitat de crear una nova branca de la matemàtica: René Descartes (1596-1650) i Pierre Fermat (1601-1665). El filòsof francès, René Descartes, està considerat el principal creador de la geometria analítica i d'aquí el nom de geometria cartesiana. El més famós dels seus tractats és el *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* de 1637 i a l'última part d'aquest treball, titulada *La géométrie*, exposa i dóna a conèixer als seus contemporanis la geometria analítica. Els dos conceptes fonamentals de Descartes són el concepte de les coordenades i el de representar en forma de corba plana qualsevol equació algebraica amb dues incògnites, fent servir el mètode de les coordenades.

L'obra de Fermat *Ad loces planos et solidos isagoge* no es va publicar en vida de l'autor i això va afavorir la impressió general que la geometria analítica havia estat invenció únicament de Descartes. L'exposició de Fermat era més sistemàtica i didàctica que la de Descartes i com a curiositat cal comentar que considerava, tal com es fa actualment, l'eix d'ordenades perpendicular a l'eix d'abcisses.

Tant Fermat com Descartes es van adonar de la possibilitat d'una geometria analítica de més de dues dimensions, però quan es va desenvolupar la geometria analítica a l'espai va ser a la primera meitat del s. XVIII gràcies a Laguerre i Clairaut.

4.1 Sistema de coordenades unidimensional

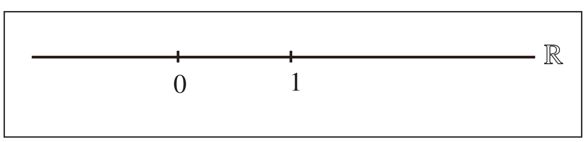


Fig. 4.1

Els nombres reals es representen com a punts d'un sistema de coordenades unidimensional, que s'anomena recta real.

Com que $(\mathbb{R},+,\cdot)$ és un cos commutatiu totalment ordenat, existeixen l'element neutre respecte a l'operació suma (el nombre 0) i l'element neutre respecte a l'operació producte (el nombre 1).

Si a la recta escollim arbitràriament la posició del nombre 0 i la del nombre 1 ja tenim una referència per determinar la posició de qualsevol altre punt $x \in \mathbb{R}$.

Definició 4.1.1 *Definim la funció* **valor absolut** $|\cdot|: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *com a*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Propietat 4.1.1 *(Distància entre dos punts de la recta real)*
La distància entre dos punts x_1 i x_2 de la recta és

$$|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

Propietat 4.1.2 *(Propietats de la funció valor absolut)*
Per a qualsevol $x, y \in \mathbb{R}$ es compleixen les següents propietats:

1. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $|x - y| = |y - x|$
4. $|xy| = |x||y|$
5. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ *si* $y \neq 0$
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(desigualtat triangular)*
7. $|x| - |y| \leq |x - y|$
8. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Exemple 4.1.1 *Demostreu que si $a \in \mathbb{R}^+$, aleshores $\forall x \in \mathbb{R}$ es compleix:*

a) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

b) $|x| > a \Leftrightarrow [x < -a \text{ o bé } x > a]$

En aquest exercici demostrarem unes propietats molt importants de la funció valor absolut utilitzant la definició d'aquesta funció i la propietat $-|x| \leq x \leq |x| \ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Recordem que per demostrar una doble implicació el que se sol fer és demostrar separadament cada una de les dues implicacions.

a) Primer de tot demostrem la implicació en aquest sentit ($\Rightarrow$).
Suposem que es compleix $|x| \leq a$ i volem veure que $-a \leq x \leq a$.
Com que $|x| \leq a$ si multipliquem per -1 obtenim $-|x| \geq -a$.
D'aquestes desigualtats i de la propietat $-|x| \leq x \leq |x|$ es dedueix la següent cadena de desigualtats

$$-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$$

per tant, $-a \leq x \leq a$ com volíem veure.
Demostrem ara la implicació en sentit contrari ($\Leftarrow$).

Suposem que $-a \leq x \leq a$ i volem veure $|x| \leq a$.

Per definició de la funció valor absolut,

$$\begin{aligned} &\text{si } x \geq 0 \ \text{ aleshores } \ |x| = x \leq a \\ &\text{si } x < 0 \ \text{ aleshores } \ |x| = -x \leq a \ \ (\text{perquè } x \geq -a) \end{aligned}$$

i això és el que volíem.

b) Primer de tot demostrem la implicació en aquest sentit ($\Rightarrow$).

Suposem que es compleix $|x| > a$ i volem veure que $x < -a$ o bé $x > a$.

Per definició de la funció valor absolut,

$$\text{si } x \geq 0 \text{ aleshores } |x| = x > a$$
$$\text{si } x < 0 \text{ aleshores } |x| = -x > a \Rightarrow x < -a$$

per tant,

$$x < -a \text{ o bé } x > a \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Demostrem ara la implicació en sentit contrari ($\Leftarrow$).

Suposem que $\forall x \in \mathbb{R}\ x < -a$ o bé $x > a$.

$$\text{si } x \geq 0 \text{ aleshores } |x| = x > a$$
$$\text{si } x < 0 \text{ aleshores } |x| = -x > a$$

Tenim, doncs, el que volíem.

Exemple 4.1.2 *Trobeu el conjunt dels nombres reals que compleixen:*

a) $\{x \in \mathbb{R} : |2x+7| \geq 3\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : |x+1| + |x+2| < 2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < |x|\}$

Es tracta de trobar els nombres reals que pertanyen a aquests conjunts tenint en compte l'exemple 4.1.1.

a)

$$|2x+7| \geq 3 \Leftrightarrow [2x+7 \geq 3 \text{ o } 2x+7 \leq -3]$$

per tant, s'ha de complir una de les dues desigualtats.

$$2x+7 \geq 3 \ \Leftrightarrow \ 2x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -2$$

$$2x+7 \leq -3 \ \Leftrightarrow \ 2x \leq -10 \Leftrightarrow x \leq -5$$

per tant,

$$\{x \in \mathbb{R} : |2x+7| \geq 3\} = (-\infty, -5] \cup [-2, +\infty)$$

b) En aquest exercici tenim la suma de dos valors absoluts. Per poder treballar més còmodament, treurem el valor absolut de $x+1$ aplicant la definició.

Si $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

$$|x+1| + |x+2| < 2 \Leftrightarrow x+1+|x+2| < 2 \Leftrightarrow |x+2| < 1-x$$

que aplicant l'exercici anterior equival a

$$x-1 < x+2 < 1-x$$

per tant, estudiarem les dues desigualtats separadament i considerarem la intersecció dels resultats corresponents.

$$x+2 < 1-x \ \Leftrightarrow\ 2x < -1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

$$x-1 < x+2 \ \Leftrightarrow -1 < 2 \ \text{(cert)}$$

Per tant,

$$\{x \in \mathbb{R} : |x+2| < 1-x\} = \left([-1,+\infty) \cap \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\right) = \left[-1,-\frac{1}{2}\right)$$

Si $x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

$$|x+1|+|x+2| < 2 \Leftrightarrow -x-1+|x+2| < 2 \Leftrightarrow |x+2| < 3+x$$

que aplicant l'exemple 4.1.1 equival a

$$-3-x < x+2 < 3+x$$

per tant, estudiarem les dues desigualtats separadament i considerarem la intersecció dels resultats corresponents.

$$x+2 < 3+x \ \Leftrightarrow\ 2 < 3 \ \text{(cert)}$$

$$-3-x < x+2 \ \Leftrightarrow -5 < 2x \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x$$

Per tant,

$$\{x \in \mathbb{R} : |x+2| < 3+x\} = (-\infty,-1) \cap \left(-\frac{5}{2},+\infty\right) = \left(-\frac{5}{2},-1\right)$$

Així doncs,

$$\{x \in \mathbb{R} : |x+1|+|x+2| < 2\} \Leftrightarrow \left[-1,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2},-1\right) = \left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

c) Tal com teníem a l'apartat *b*) d'aquest exercici, en aquesta desigualtat apareixen dos valors absoluts. Treurem el valor absolut de x aplicant la definició.

Si $x \geq 0$

$$|x^2-2| < x$$

que, aplicant l'exercici anterior, equival a

$$-x < x^2-2 < x$$

per tant, estudiarem les dues desigualtats separadament i considerarem la intersecció dels resultats corresponents.

$$-x < x^2 - 2 \iff x^2 + x - 2 > 0 \iff (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

$$x^2 - 2 < x \iff x^2 - x - 2 < 0 \iff (-1, 2)$$

Per tant,

$$\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < x\} = (\,(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)\,) \cap (-1, 2) \;=\; (1, 2)$$

Si $x < 0$

$$|x^2 - 2| < |x| \iff |x^2 - 2| < -x$$

que, aplicant l'exemple 4.1.1, equival a

$$x < x^2 - 2 < -x$$

per tant, estudiarem les dues desigualtats separadament i considerarem la intersecció dels resultats corresponents.

$$x < x^2 - 2 \iff x^2 - x - 2 > 0 \iff (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

$$x^2 - 2 < -x \iff x^2 + x - 2 < 0 \iff (-2, 1)$$

Per tant,

$$\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < -x\} = (\,(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)\,) \cap (-2, 1) \;=\; (-2, -1)$$

Així doncs,

$$\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < |x|\} = (-2, -1) \cup (1, 2)$$

4.2 Geometria analítica plana

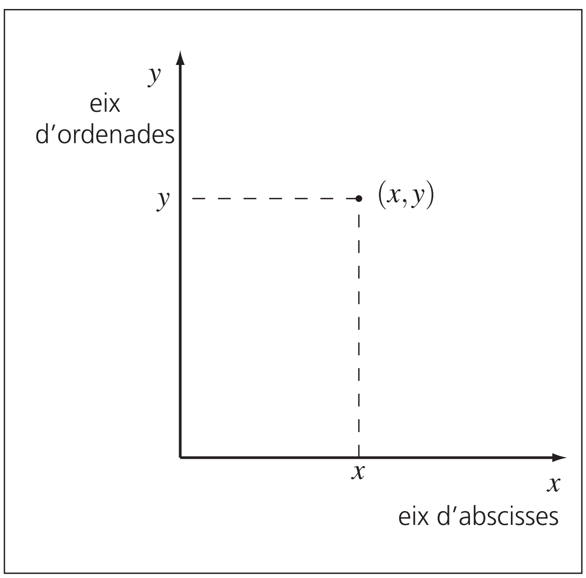


Fig. 4.2

En un sistema de coordenades cartesianes del pla, cada punt ve donat per les seves coordenades (x, y). La primera coordenada s'anomena **abscissa** del punt i la segona, **ordenada** del punt.

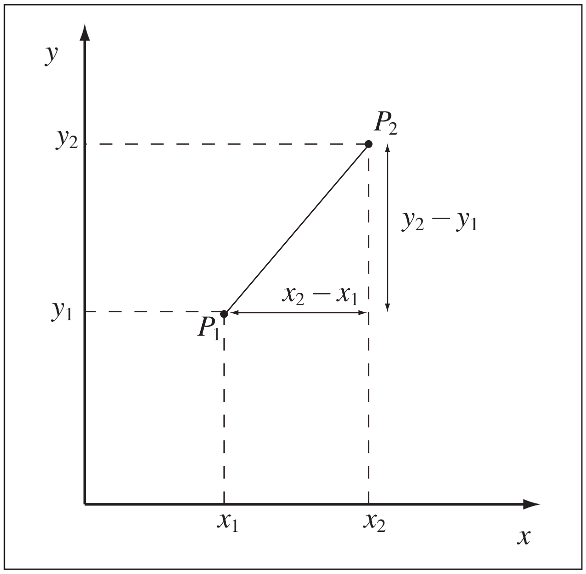


Fig. 4.3

Propietat 4.2.1 *(Distància entre dos punts del pla) La distància d entre els punts*

$$P_1 = (x_1, y_1) \quad i \quad P_2 = (x_2, y_2)$$

del pla ve donada per la fórmula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

que resulta d'aplicar el teorema de Pitàgores que recordarem en el teorema 6.1.1.

4.2.1 Rectes en el pla

Definició 4.2.1 *(Recta) Donat un punt P del pla i un vector $\vec{v}$ no nul, es defineix la recta que passa per P i té la direcció del vector $\vec{v}$ com al conjunt de punts tals que el vector $\vec{PX} = \lambda\vec{v}$ amb $\lambda \in \mathbb{R}$.*

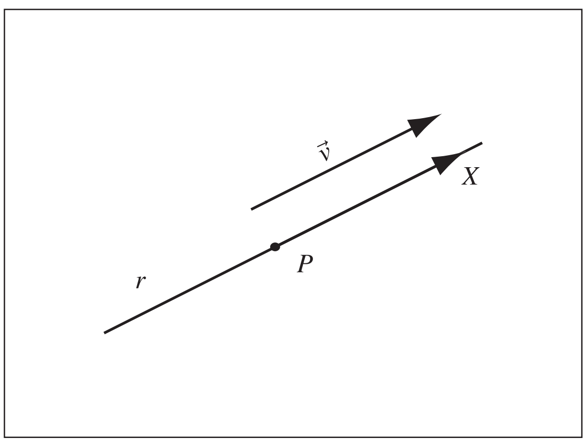


Fig. 4.4

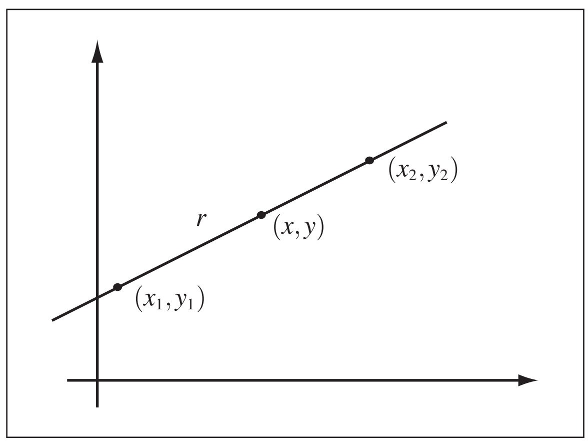


Fig. 4.5

L'equació de la recta també es defineix per dos punts de la mateixa recta. Si els punts (x_1, y_1) i (x_2, y_2) pertanyen a una recta r, direm que el punt (x, y) pertany a la recta si

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Definició 4.2.2 *(Pendent d'una recta) Una recta no vertical que conté els punts diferents $P = (x_1, y_1)$ i $Q = (x_2, y_2)$ té* **pendent** *m, essent*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Propietat 4.2.2 *(Diferents formes d'expressar l'equació d'una recta)*

1. *Equació general o forma cartesiana.*

$$Ax+By+C=0 \quad \text{essent} \quad A,B,C\in\mathbb{R} \;\; i \;\; (A,B)\neq(0,0)$$

   Observació: $(B,-A)$ *(o bé* $(-B,A)$*) és el vector director de la recta i* $\frac{-A}{B}$ *és el pendent de la recta.*

2. *Equació explícita.*

   $y=mx+n$ *on* m *és el pendent i* n *és l'ordenada a l'origen.*

3. *Equació vectorial.*

   Si la recta passa pels punts $P=(x_1,y_1)$ *i* $Q=(x_2,y_2)$

$$(x,y)=(x_1,y_1)+\lambda(x_2-x_1,y_2-y_1)$$

   Si la recta passa per $P=(x_1,y_1)$ *i té vector director* $\vec{v}=(v_1,v_2)$

$$(x,y)=(x_1,y_1)+\lambda(v_1,v_2)$$

4. *Equació paramètrica.*

   Si la recta passa per $P=(x_1,y_1)$ *i té vector director* $\vec{v}=(v_1,v_2)$

$$\begin{cases} x=x_1+\lambda v_1 \\ y=y_1+\lambda v_2 \end{cases}$$

5. *Equació contínua.*

   Eliminant λ *a l'apartat anterior, deduïm* $\quad \dfrac{x-x_1}{v_1}=\dfrac{y-y_1}{v_2}$

Propietat 4.2.3 *(Rectes paral·leles i perpendiculars) Si* r_1 *i* r_2 *són dues rectes no verticals amb pendents* m_1 *i* m_2*, aleshores*

r_1 *i* r_2 *són paral·leles* $\Longleftrightarrow m_1=m_2$ $\qquad$ l_1 *i* l_2 *són perpendiculars* $\Longleftrightarrow m_1m_2=-1\ \left(m_1=-\dfrac{1}{m_2}\right)$

És a dir, dues rectes són paral·leles, si i només si, tenen el mateix pendent i són perpendiculars, si i només si, els seus pendents són inversos i oposats.

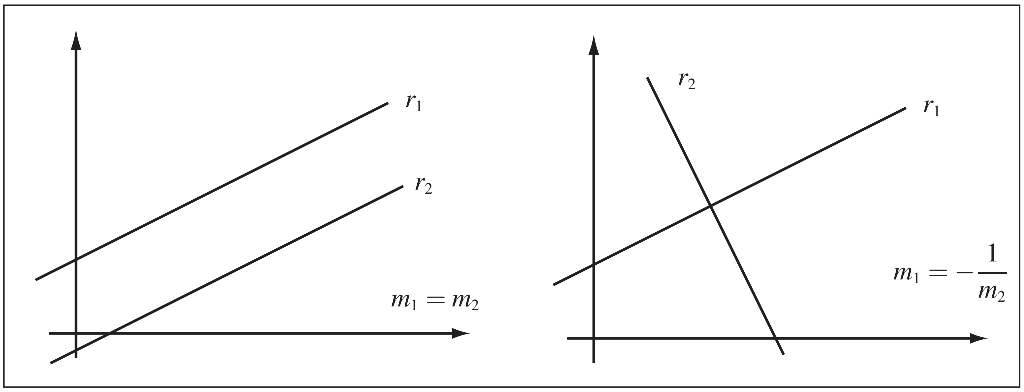


Fig. 4.6

Observació: Si tenim una recta donada en la forma cartesiana $Ax+By+C=0$, el vector (A,B) és el vector perpendicular al vector director de la recta.

Propietat 4.2.4 *(Interpretació geomètrica d'un sistema d'equacions lineal) Un sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites correspon geomètricament a considerar dues rectes del pla. Com que les solucions d'un sistema són aquelles que satisfan simultàniament totes les equacions, resoldre el sistema consisteix geomètricament a trobar tots els punts d'intersecció de les rectes. Així, doncs, l'estudi dels punts de tall de dues rectes del pla és el del sistema*

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By=C \\ A'x+B'y=C' \end{array}\right\}$$

$$Si\ M=\begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix}\ i\ M'=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$$

$rang\ M=2 \Rightarrow$ *sistema compatible amb solució única* $\Rightarrow$ *les rectes es tallen en un únic punt.*

$\left.\begin{array}{l} rang\ M=1 \\ rang\ M'=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ *sistema incompatible* $\Rightarrow$ *rectes paral·leles i diferents.*

$\left.\begin{array}{l} rang\ M=1 \\ rang\ M'=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ *hi ha infinites solucions* $\Rightarrow$ *rectes coincidents.*

4.3 Rectes i plans a l'espai

4.3.1 Rectes a $\mathbb{R}^3$

L'equació de la recta que passa pel punt (x_0,y_0,z_0) i té vector director (v_1,v_2,v_3) es pot expressar com a:

1. Equació vectorial
$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(v_1,v_2,v_3)$$
2. Equació paramètrica
$$\left.\begin{array}{l} x=x_0+\lambda v_1 \\ y=y_0+\lambda v_2 \\ z=z_0+\lambda v_3 \end{array}\right\}$$
3. Equació contínua
$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3} \qquad (\text{si } v_1,v_2,v_3\neq 0)$$

Si ens demanen l'equació d'una recta que passa per dos punts $P=(x_1,y_1,z_1)$ i $Q=(x_2,y_2,z_2)$, es pot expressar com a

$$(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

o bé

$$\left.\begin{array}{l} x=x_1+\lambda(x_2-x_1) \\ y=y_1+\lambda(y_2-y_1) \\ z=z_1+\lambda(z_2-z_1) \end{array}\right\}$$

o bé

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Recordem que dues rectes del pla que no són paral·leles es tallen. A l'espai això no és cert. Hi ha rectes amb diferents vectors directors que no es tallen, en aquest cas direm que es creuen. Per tant, dues rectes a l'espai poden ser secants (és a dir tallar-se), ser paral·leles o bé poden creuar-se.

4.3.2 Plans a $\mathbb{R}^3$

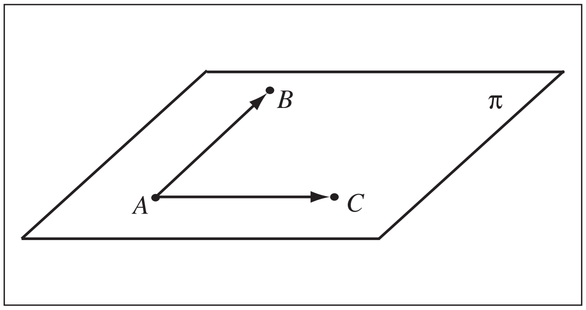


Fig. 4.7

L'equació d'un pla ve determinada per tres punts del pla o bé per un punt del pla i dos vectors directors.

Tot pla també queda determinat per un dels seus punts i un vector ortogonal a qualsevol vector del pla. Aquest vector s'anomena normal del pla.

L'equació del pla que passa pel punt $P=(x_0,y_0,z_0)$ i té vectors directors $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ i $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ es pot expressar en **l'equació vectorial** de pla

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(u_1,u_2,u_3)+\mu(v_1,v_2,v_3) \quad \text{essent } \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

També es pot expressar el pla amb les **equacions paramètriques**

$$\left.\begin{array}{l} x=x_0+\lambda u_1+\mu v_1 \\ y=y_0+\lambda u_2+\mu v_2 \\ z=z_0+\lambda u_3+\mu v_3 \end{array}\right\}$$

o com a

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & u_1 & v_1 \\ y-y_0 & u_2 & v_2 \\ z-z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}=0$$

D'aquesta última expressió es dedueix **l'equació cartesiana** del pla

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Donada l'equació general o cartesiana d'un pla

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Si $A=0 \Longrightarrow$ pla paral·lel a l'eix x

Si $B=0 \Longrightarrow$ pla paral·lel a l'eix y

Si $C=0 \Longrightarrow$ pla paral·lel a l'eix z

Si $A=B=0 \Longrightarrow$ pla paral·lel al pla xy

Si $D=0 \Longrightarrow$ el pla passa per l'origen de coordenades

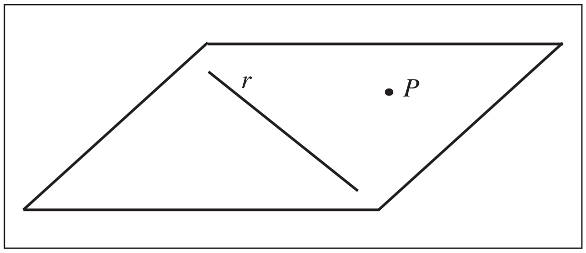


Fig. 4.8

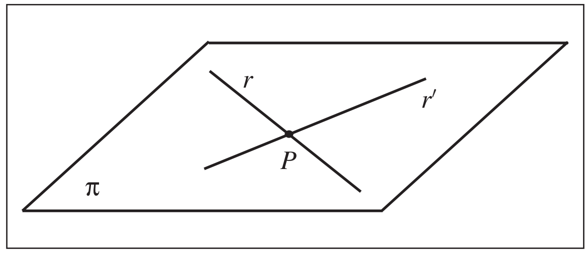


Fig. 4.9

Hi ha també altres formes de determinar un pla; per exemple, un pla queda determinat per una recta i un punt exterior a ella.

Si r és una recta i P un punt que no pertany a r, aleshores existeix un i només un pla que passa pel punt P i conté la recta.

Exemple 4.3.1 *Trobeu l'equació del pla determinat per r i P essent r la recta d'equació*

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$$

i P el punt $(0,0,1)$.

Un manera de resoldre el problema és buscar dos punts de la recta, per exemple $(1,0,1)$ i $(3,3,5)$ (considerant $y=0$ i $y=3$, respectivament). Aleshores, el pla que busquem és el pla que passa pels punts $(0,0,1)$, $(1,0,1)$ i $(3,3,5)$ que té per equació

$$4y - 3z + 3 = 0$$

Un pla també està determinat per dues rectes que es tallen.

Si r i r' són dues rectes que es tallen en un punt P, aleshores existeix un únic pla que conté les dues rectes.

4.4 Relacions d'incidència a l'espai

4.4.1 Posicions relatives de dos plans

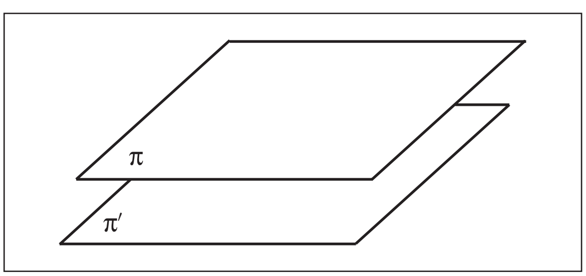


Fig. 4.10

Definició 4.4.1 *(Plans paral·lels) Dos plans π i π' s'anomenen paral·lels si són iguals o bé si no tenen cap punt en comú.*

Propietat 4.4.1 *Considerem dos plans π i π' d'equacions*

$$\begin{aligned} \pi &: \; Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' &: \; A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{aligned}$$

Els dos plans tenen algun punt en comú, si i només si, el sistema format per les seves equacions és compatible.

Si M i M' són les matrius dels coeficients del sistema i la matriu ampliada, respectivament

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

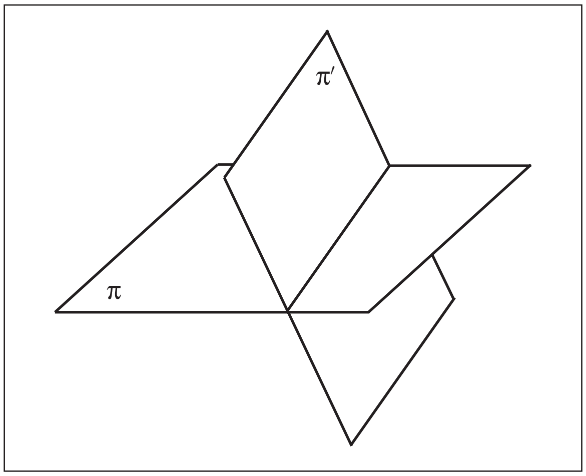


Fig. 4.11

Aleshores,

π i π′ es tallen en una recta si

$$rang(M) = rang(M') = 2$$

(vegeu figura 4.11)

π i π′ són coincidents si

$$rang(M) = rang(M') = 1$$

π i π′ són paral·lels no coincidents si

$$rang(M) = 1 \quad i \quad rang(M') = 2$$

(Observem que dos plans mai poden tallar-se en un únic punt.)

Si cap dels coeficients és zero, la condició

$$rang \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 1$$

es pot escriure com a

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

per tant,

π i π′ són coincidents si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'}$

π i π′ són paral·lels no coincidents si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'}$

Exemple 4.4.1 *Estudieu la posició relativa dels plans π i π′ d'equació*

$$\begin{aligned} \pi &: \ 3x + 2y - 6z - 7 = 0 \\ \pi' &: \ 4x - y + z + 2 = 0 \end{aligned}$$

Com que

$$rang \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

els plans π i π′ es tallen en una recta.

4.4.2 Feix de plans

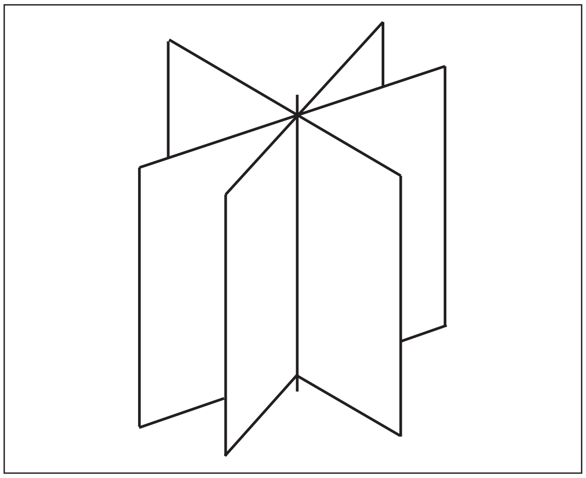


Fig. 4.12

Definició 4.4.2 *(Feix de plans) Donada una recta r, es defineix* **feix de plans** *d'aresta r com el conjunt de plans que contenen la recta r.*

Propietat 4.4.2 *Donada l'equació d'una recta com la intersecció de dos plans*

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

aleshores,

$$\lambda(Ax+By+Cz+D)+\mu(A'x+B'y+C'z+D')=0$$

defineix el feix de plans que passen per la recta.

4.4.3 Posicions relatives de recta i pla

Definició 4.4.3 *(Recta paral·lela a un pla) Donades una recta r i un pla π a l'espai, direm que r és paral·lela a π si r està continguda a π o bé r i π no tenen punts en comú.*

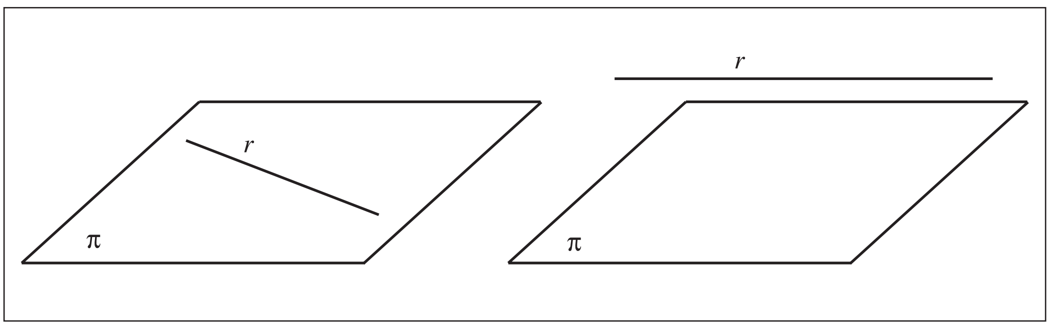


Fig. 4.13

Propietat 4.4.3 *Si la recta r ve donada com la intersecció de dos plans*

$$r : \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

i l'equació del pla és $A''x+B''y+C''z+D''=0$

Aleshores, considerem les matrius

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad i \quad M' = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

Si $rang(M) = rang(M') = 3$, la recta r i el pla π es tallen en un punt.

Si $rang(M) = 2$ i $rang(M') = 3$, la recta r i el pla π són paral·lels.

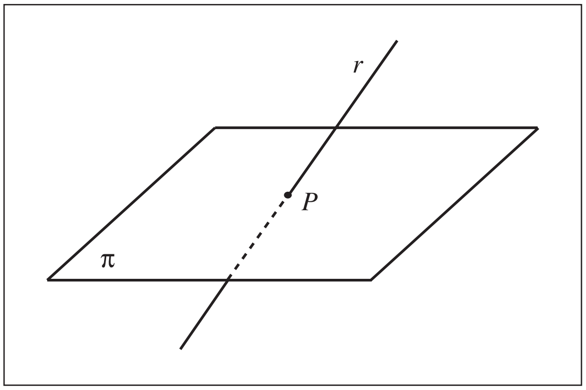


Fig. 4.14

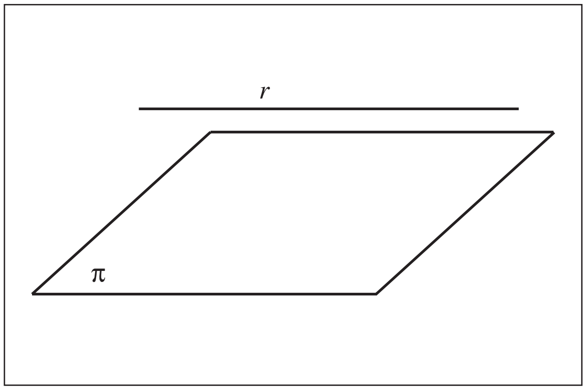


Fig. 4.15

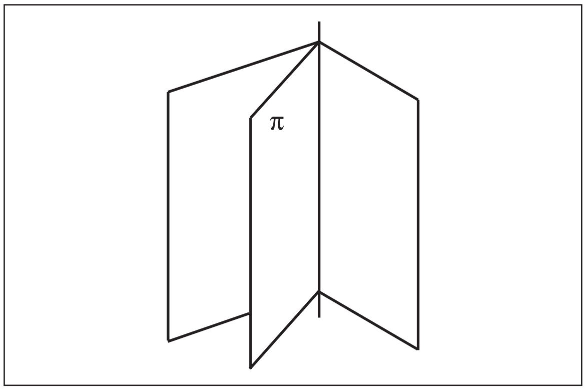


Fig. 4.16

Si $rang(M) = rang(M') = 2$, aleshores π pertany al feix de plans d'aresta r i, per tant, el pla π conté la recta r.

Exemple 4.4.2 *Estudieu la posició relativa de la recta r d'equació*

$$r: \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$$

i el pla π d'equació $x-y+3z=5$.

Com que

$$rang\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

$$rang\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 3$$

la recta r i el pla π es tallen en un punt. És el punt $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 2)$ que hem obtingut resolent el sistema d'equacions determinat per la recta i el pla.

4.4.4 Posicions relatives de dues rectes

Si r i r' són dues rectes a l'espai, aquestes rectes poden tenir les següents posicions relatives:

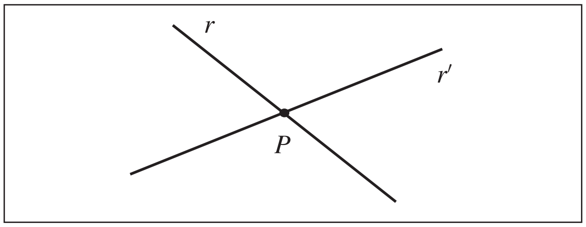


Fig. 4.17

1. Tallar-se si tenen un únic punt en comú.

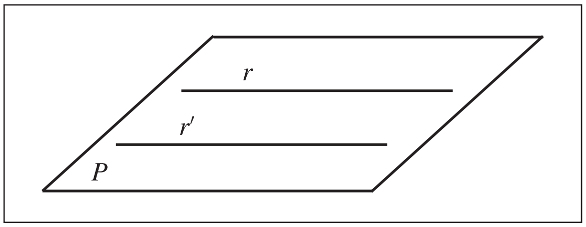


Fig. 4.18

2. Ser paral·leles si són iguals o bé no tenen punts en comú i estan situades en un mateix pla. Si són iguals, es diu que són coincidents.

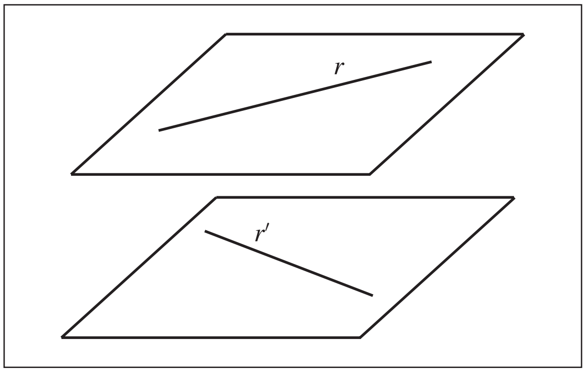


Fig. 4.19

3. Creuar-se si no tenen punts en comú i no hi ha cap pla que les contingui.

4.5 L'espai euclidià

4.5.1 Producte escalar

Definició 4.5.1 *(Mòdul d'un vector) El* mòdul *del vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, o la seva longitud, és*

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Definició 4.5.2 *(Producte escalar) Donats dos vectors $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, el* producte escalar *dels dos vectors és el nombre real $\vec{u} \cdot \vec{v}$ definit com a*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Definició 4.5.3 *(Espai euclidià) Direm que un espai és euclidià si hi ha definit un producte escalar. De la definició anterior deduïm que $\mathbb{R}^3$ és un espai euclidià. $\mathbb{R}^n$ és un espai euclidià.*

Propietat 4.5.1 *(Propietats del producte escalar) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són dos vectors de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores es compleix*

1. $\vec{v} \cdot \vec{v} = ||\vec{v}||^2$
2. $\vec{v} \cdot 0 = 0$
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
4. $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})$
5. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Definició 4.5.4 *(Definició alternativa del producte escalar)*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cos\alpha$$

on α *és l'angle entre els dos vectors* $(0 \leq \alpha \leq \pi)$.

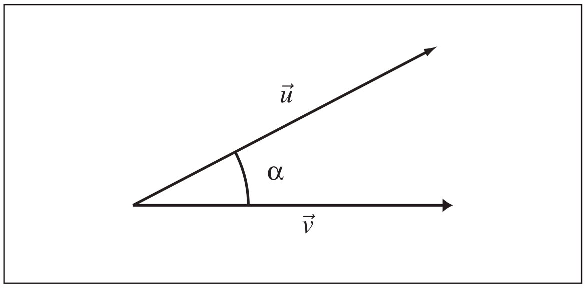


Fig. 4.20

Propietat 4.5.2 *(Angle de dos vectors) Si* α *és l'angle de dos vectors* $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$ *diferents de zero, aleshores,*

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||}$$

Propietat 4.5.3 *(Vectors ortogonals) Donats dos vectors* $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$ *diferents de zero, són ortogonals, si i només si,*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

4.5.2 Producte vectorial

La definició de producte vectorial només té sentit a $\mathbb{R}^3$, es tracta d'una operació interna que té moltes utilitats en física i matemàtiques, per exemple en la resolució de problemes mètrics. Considerem la base canònica i, j, k.

Definició 4.5.5 *(Producte vectorial) Donats dos vectors de* $\mathbb{R}^3$ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *i* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, *el producte vectorial dels dos vectors es defineix com a*

$$\vec{u}\times\vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)i + (u_3v_1 - u_1v_3)j + (u_1v_2 - u_2v_1)k$$

que també es pot escriure com a

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

per tal de recordar la definició. Observem que aquest determinant no té sentit perquè els seus elements són a la vegada nombres reals i vectors. Entenem, doncs, que es tracta d'una notació.

Propietat 4.5.4 *(Propietats del producte vectorial) Si* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *són vectors de* $\mathbb{R}^3$ *i* λ *i* $\mu \in \mathbb{R}$, *aleshores,*

1. $(\lambda\vec{u})\times(\mu\vec{v}) = \lambda\mu(\vec{u}\times\vec{v})$
2. $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$
3. *si* $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ *aleshores* $\vec{v}\times\vec{u} = 0$
4. $\vec{v}\times 0 = 0\times\vec{v} = 0$

Propietat 4.5.5 *(Propietat geomètrica del producte vectorial) Si* $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$ *són dos vectors de* $\mathbb{R}^3$ *no nuls i no paral·lels, aleshores el vector* $\vec{u}\times\vec{v}$ *és perpendicular a* $\vec{u}$ *i a* $\vec{v}$.

Propietat 4.5.6 *(Equació del pla perpendicular a un vector) L'equació del pla perpendicular al vector* (a,b,c) *no nul que passa pel punt* (x_0, y_0, z_0) *és*

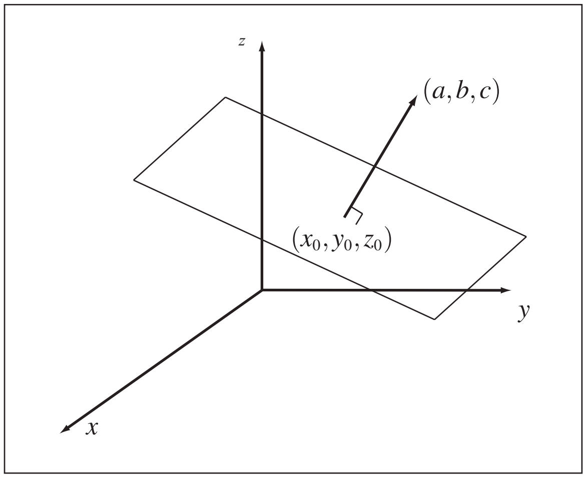


Fig. 4.21

$$(a,b,c)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} =$$

$$= a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$$

Observem que obtenim l'equació a base d'imposar la perpendicularitat (mitjançant la igualació a zero del producte escalar) entre el vector (a,b,c) i un vector genèric que pertany al pla.

Propietat 4.5.7 *(Recta perpendicular a un pla) Donat el pla $Ax+By+Cz+D=0$, el vector de coordenades (A,B,C) és el vector director de la recta perpendicular al pla (conclusió que es desprèn de l'apartat anterior).*

4.6 Distàncies

Propietat 4.6.1 *(Distància entre dos punts) Donats els punts $P=(x_0,y_0,z_0)$ i $Q=(x_1,y_1,y_1)$, la seva distància ve donada per*

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

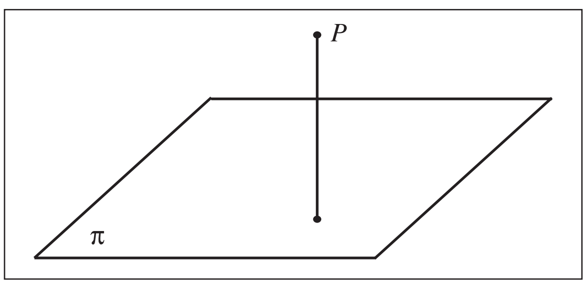


Fig. 4.22

Propietat 4.6.2 *(Distància d'un punt a un pla de $\mathbb{R}^3$) La distància del punt (x_0,y_0,z_0) al pla $Ax+By+Cz+D=0$ és*

$$d = \left| \frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right|$$

Exemple 4.6.1 *Trobeu la distància entre el punt $P=(2,5,-3)$ i el pla $x+3y-2z=4$.*

Calculem la distància amb la fórmula de la propietat 4.6.2

$$d = \left| \frac{1\cdot 2+3\cdot 5-3\cdot(-2)-4}{\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}} \right| = \frac{19}{\sqrt{14}} = \frac{19\sqrt{14}}{14}$$

Tal com hem comentat al pròleg, hi ha paquets computacionals que resolen problemes de càlcul; per exemple, aquesta distància es pot calcular amb MAPLE utilitzant les instruccions següents:

```
> with(geom3d):
> plane(P,x+3*y-2*z-4=0,[x,y,z]):
> point(A,[2,5,-3]):
> distance(A,P);
```

$$\frac{19}{14}\sqrt{14}$$

Propietat 4.6.3 *(Distància entre dos plans paral·lels)* *La distància entre dos plans paral·lels es pot trobar calculant la distància d'un punt d'un dels plans a l'altre pla. Si π i π' son dos plans paral·lels, les seves equacions només difereixen en el terme independent.*

Si $P = (x_0, y_0, z_0)$ és un punt del pla π

$$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$$
$$\pi': \ Ax + By + Cz + D' = 0$$

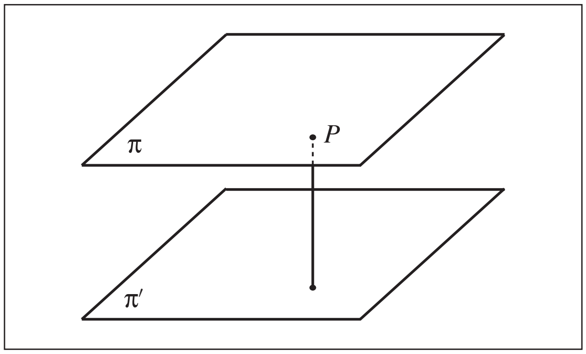


Fig. 4.23

$$d(\pi, \pi') = d(P, \pi') = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \frac{D' - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Exemple 4.6.2 *Calculeu la distància entre els plans $3x - 2y + 4z - 5 = 0$ i $3x - 2y + 4z + 3 = 0$.*

De la propietat 4.6.3 es dedueix que

$$d = \left| \frac{3 - (-5)}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} \right| = \frac{8}{\sqrt{29}} = \frac{8\sqrt{29}}{29}$$

Per consolidar els conceptes d'aquest capítol podeu anar a la pàgina
`http://www.wiris.net/upc.edu/collection`

5 Còniques i quàdriques

En aquest capítol es defineixen les còniques perquè és important que un estudiant de Càlcul identifiqui aquestes corbes amb les seves equacions. Com a generalització de les còniques trobareu en aquest capítol les equacions de les quàdriques amb la representació gràfica corresponent per tal de poder identificar aquestes superfícies. Les quàdriques són molt importants en l'estudi del càlcul diferencial de diverses variables.

5.1 Còniques

Anomenem còniques les corbes que s'obtenen com la intersecció d'un pla i un con de doble full, considerant que el pla no passa en cap cas pel vèrtex del con, perquè en aquest cas la figura resultant seria una cònica degenerada (punts o bé rectes). Aquestes corbes són corbes planes que es poden escriure com el conjunt de solucions d'una equació de segon grau i són la circumferència, l'el·lipse, la paràbola i la hipèrbola.

- La circumferència és la corba plana que resulta de tallar la superfície d'un con de revolució per un pla paral·lel a la base del con.
- L'el·lipse és la corba plana que resulta de tallar la superfície d'un con de revolució per un pla que no és paral·lel a cap de les seves generatrius.

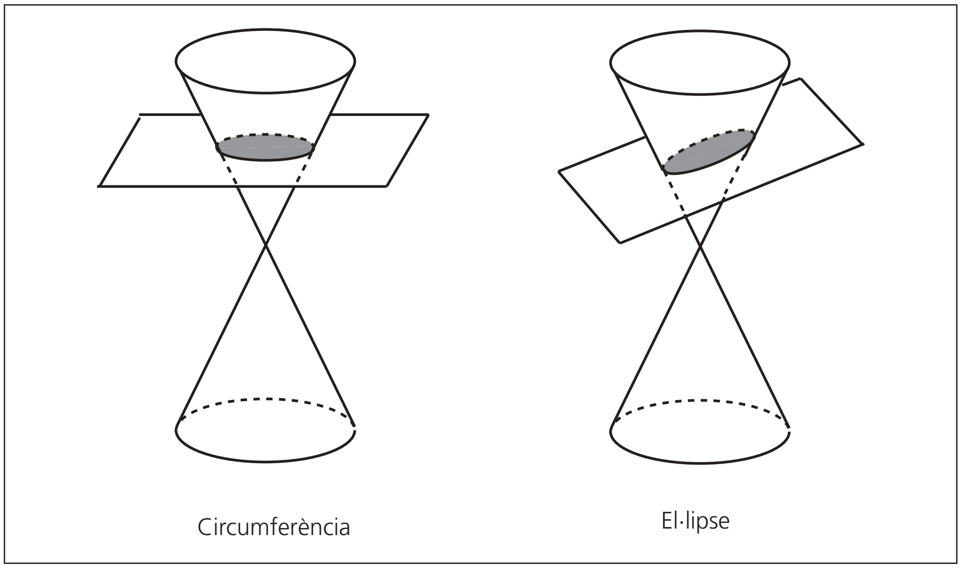


Fig. 5.1

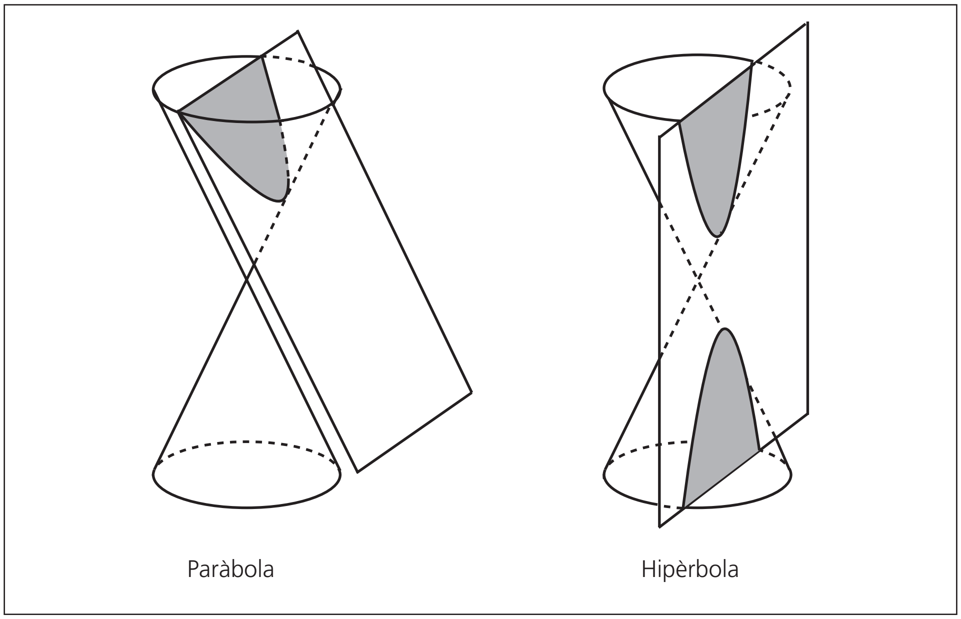


Fig. 5.2

- La paràbola és la corba plana que resulta de tallar una superfície d'un con de revolució per un pla paral·lel a una de les seves generatrius.
- La hipèrbola és la corba plana que resulta de tallar una superfície d'un con de revolució per un pla paral·lel a dues de les seves generatrius.

5.1.1 Circumferència

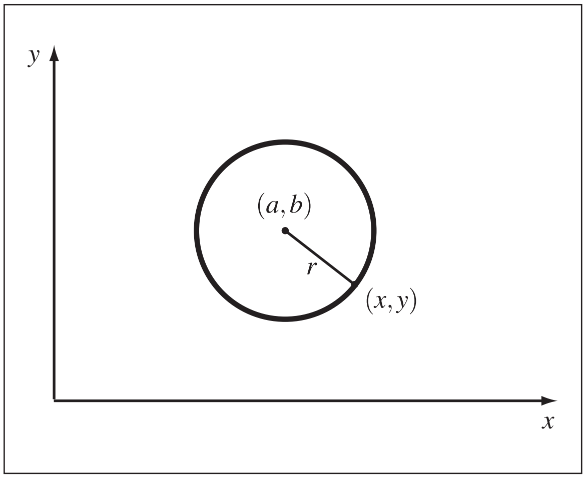


Fig. 5.3

Definició 5.1.1 *(Circumferència) Considerem* (a,b) *un punt del pla i* $r > 0$ $(r \in \mathbb{R})$. *Anomenem* **circumferència** *de* **centre** (a,b) *i* **radi** r *el conjunt de punts* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tals que la distància al punt* (a,b) *és* r.

Propietat 5.1.1 *(Equació canònica de la circumferència) Un punt* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *pertany a la circumferència de centre* (a,b) *i radi* r *si, i només si,*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Demostració. Hem definit la circumferència com el conjunt de punts del pla que estan a distància r del centre (a,b), per tant,

$$d((x,y),(a,b)) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

d'on, elevant al quadrat, tenim que

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

q.e.d.

No sempre que tinguem l'equació d'una circumferència estarà en forma canònica.
L'equació general d'una circumferència és:

$$x^2+y^2-mx-ny+p=0$$

Observació: si el coeficient de x^2 i y^2 és diferent de 1, dividim tota l'equació per aquest nombre.

És interessant saber trobar el centre i el radi per poder interpretar gràficament la circumferència. Per fer-ho seguirem les pautes que donem a continuació:

1. Tenir en compte el signe de m, el coeficient de x.
2. Dividir per 2 el coeficient m i escriure

$$\left(x+\frac{m}{2}\right)^2 \quad \text{o bé} \quad \left(x-\frac{m}{2}\right)^2 \quad \text{segons el pas } 1.$$

3. Com que $\left(x-\frac{m}{2}\right)^2=x^2-mx+\frac{m^2}{4}$, sumem $\frac{m^2}{4}$ als dos costats de la igualtat i obtenim:

$$x^2+y^2-mx-ny+p+\frac{m^2}{4}=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+y^2-ny+p$$

4. Fem el mateix amb la variable y i obtenim:

$$x^2+y^2-mx-ny+p+\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{4}=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{n}{2}\right)^2+p$$

   Així, doncs, podem escriure l'equació del cercle com a:

$$x^2+y^2-mx-ny+p=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{n}{2}\right)^2+p-\frac{m^2}{4}-\frac{n^2}{4}=0$$

   per tant,

$$\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{n}{2}\right)^2=\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{4}-p$$

   d'on la circumferència té centre $\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)$ i radi $\sqrt{\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{4}-p}$.

Exemple 5.1.1 *Trobeu el centre i el radi de la circumferència*

$$x^2+y^2-6x+2y+6=0$$

Primer de tot agrupem els termes en x i en y a l'equació:

$$x^2-6x+y^2+2y+6=0$$

Com que $(x-3)^2=x^2-6x+9$ i $(y+1)^2=y^2+2y+1$ podem escriure

$$x^2-6x+y^2+2y+6=(x-3)^2+(y+1)^2+6-10=0$$

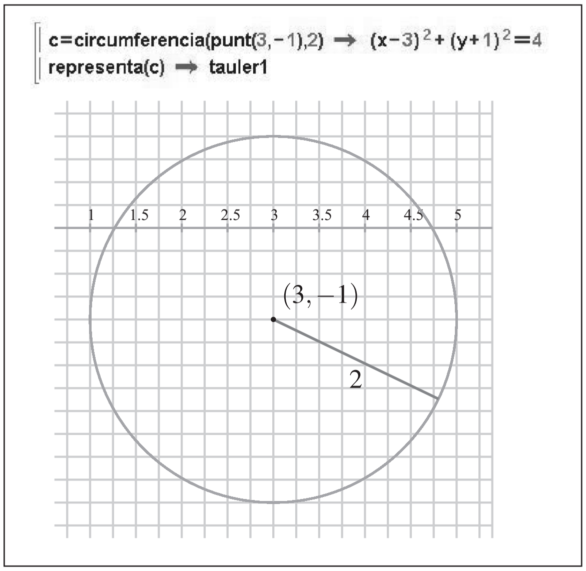


Fig. 5.4

per tant,

$$(x-3)^2+(y+1)^2=4$$

Així, doncs, aquesta circumferència està centrada al punt $(3,-1)$ i té radi 2.

La representació gràfica s'ha fet amb el paquet computacional WIRIS, amb les següents instruccions (fig. 5.4)

Per trobar l'equació canònica d'una circumferència, sovint s'acostuma a utilitzar la següent igualtat de coeficients. Si l'equació de la circumferència és

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

com que

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

es dedueix que

$$\begin{aligned} m &= -2a \\ n &= -2b \\ p &= a^2+b^2-r^2 \end{aligned}$$

Així, doncs, a l'exemple 5.1.1 si volem trobar el centre i el radi de la circumferència

$$x^2+y^2-6x+2y+6=0$$

com que

$$\begin{aligned} -6 = -2a \ &\Rightarrow\ a=3 \\ 2 = -2b \ &\Rightarrow\ b=-1 \\ 6 = 9+1-r^2 \ &\Rightarrow\ r=2 \end{aligned}$$

per tant, és la circumferència de centre el punt (3,-1) i radi 2.

Exemple 5.1.2 *Trobeu l'equació d'una circumferència concèntrica amb*

$$x^2+y^2-12x-4y-69=0$$

i que passa pel punt $(0,8)$*.*

La circumferència que estem buscant té el mateix centre que el de l'equació

$$x^2+y^2-12x-4y-69=0$$

per tant, busquem aquest centre.

$$x^2+y^2-12x-4y-69=(x-6)^2+(y-2)^2-69-40=0$$
$$(x-6)^2+(y-2)^2=109$$

Circumferència de centre $(6,2)$ i radi $\sqrt{109}$.

L'equació que busquem és del tipus

$$(x-6)^2+(y-2)^2=r^2$$

Com que passa pel punt $(0,8)$: $(0-6)^2+(8-2)^2=r^2$ d'on $36+36=r^2 \Rightarrow 72=r^2$

Per tant, l'equació de la circumferència és:

$$(x-6)^2+(y-2)^2=72.$$

5.1.2 Paràbola

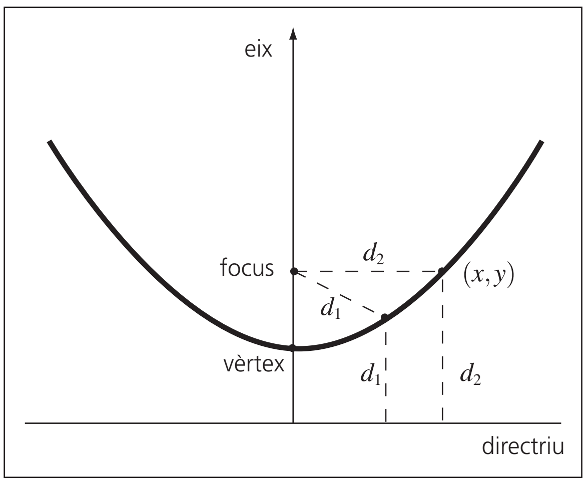


Fig. 5.5

Definició 5.1.2 *(Paràbola) Una* **paràbola** *és el conjunt dels punts del pla que equidisten d'una recta fixa (***directriu***) i un punt fix (***focus***) que està fora d'aquesta recta.*

Definició 5.1.3 *(Vèrtex i eix de la paràbola) Anomenem* **vèrtex** *de la paràbola el punt mitjà entre el focus i la directriu, i la recta que passa pel focus i pel vèrtex s'anomena* **eix** *de la paràbola.*

Propietat 5.1.2 *(Equació canònica de la paràbola) Un punt pertany a una paràbola de vèrtex (h,k) i directriu $y=k-p$ si, i només si,*

$$(x-h)^2=4p(y-k) \quad \textit{eix vertical}$$

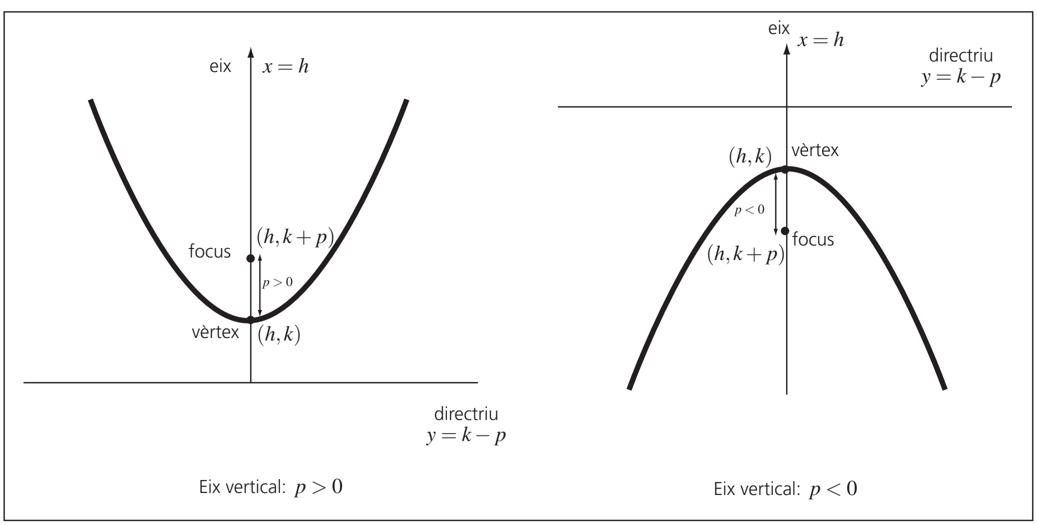


Fig. 5.6

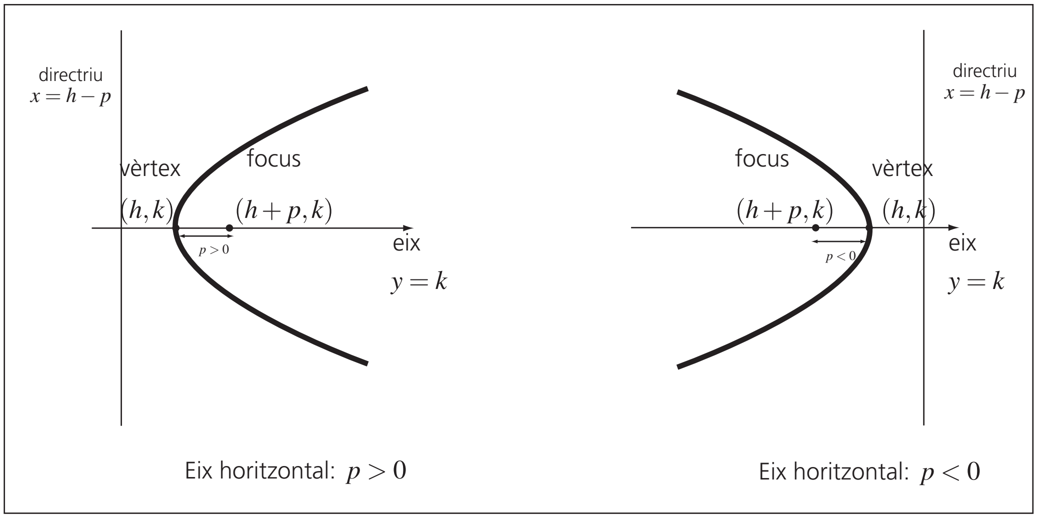


Fig. 5.7

Per la directriu $x = h - p$ l'equació és

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \quad \text{eix horitzontal}$$

El focus és a l'eix x a una distància $|p|$ del vèrtex.

Segons les coordenades del focus i l'equació de la directriu hi ha diferents orientacions de la paràbola.

Exemple 5.1.3 *(Obtenció de l'equació reduïda d'una paràbola)*

Si les coordenades del focus són $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ i l'equació de la directriu és $x = -\frac{p}{2}$, les coordenades d'un punt genèric (x,y) de la paràbola compleixen:

$$d\left((x,y), \left(\frac{p}{2}, 0\right)\right) = x + \frac{p}{2}$$

Per tant,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

i si elevem al quadrat

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

d'on

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

i simplificant

$$y^2 = 2px$$

obtenim l'equació reduïda de la paràbola que correspon a la figura següent:

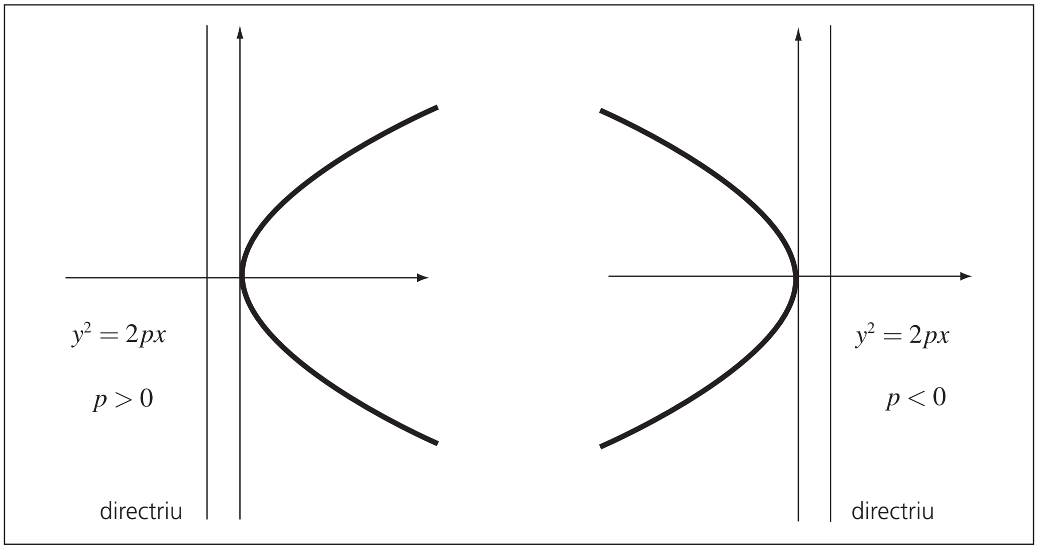


Fig. 5.8

Nota: Comproveu que si les coordenades del focus són $\left(0, \frac{p}{2}\right)$, és a dir, si la directriu és una recta paral·lela a l'eix d'abscisses, aleshores, l'equació de la paràbola és

$$x^2 = 2py \Rightarrow y = \frac{x^2}{2p}$$

Raoneu quina és la representació gràfica en aquest cas.

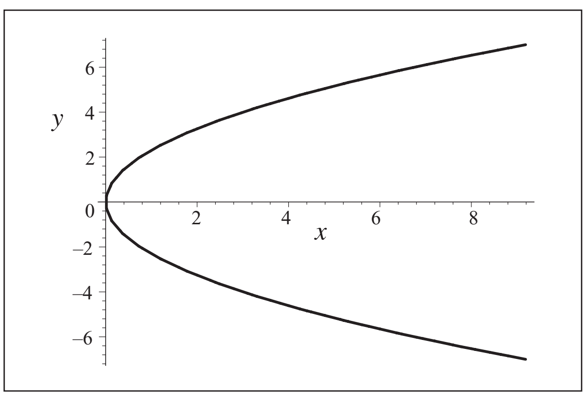


Fig. 5.9

Exemple 5.1.4 *Trobeu l'equació de la paràbola tal que el seu vèrtex coincideix amb l'origen de coordenades i passa pel punt $(3,4)$ essent el seu eix la recta OX.*

Si l'eix és la recta OX, la paràbola té una equació del tipus

$$y^2 = 2px$$

Com que passa pel punt $(3,4)$, es compleix que

$$4^2 = 2p \cdot 3$$

per tant, $p = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$. Així, doncs, l'equació de la paràbola és $y^2 = \frac{16}{3}x$. Veure la figura 5.9.

5.1.3 El·lipse

Definició 5.1.4 *(El·lipse) Una* **el·lipse** *és el conjunt dels punts del pla tals que la suma de les seves distàncies a dos punts diferents prefixats (anomenats* **focus***) és constant.*

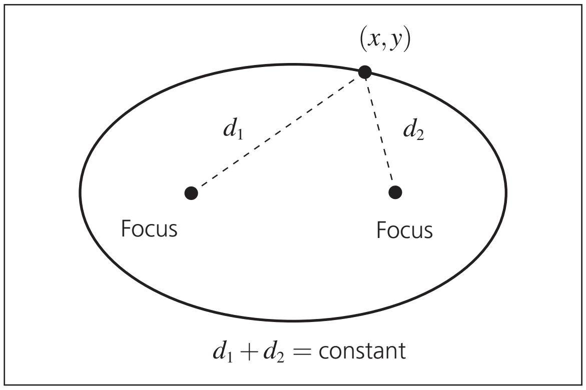


Fig. 5.10

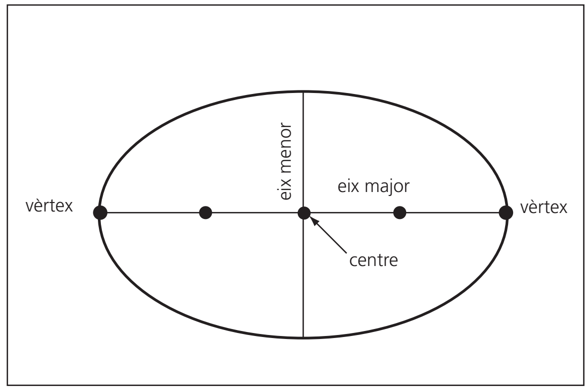


Fig. 5.11

Definició 5.1.5 *La recta que passa pels focus talla l'el·lipse a dos punts que s'anomenen* **vèrtexs**. *La corda que uneix els vèrtexs és l'***eix major** *de l'el·lipse i el seu punt mitjà és el* **centre** *de l'el·lipse. La corda perpendicular a l'eix major pel centre és l'***eix menor** *de l'el·lipse.*

Propietat 5.1.3 *(Equació canònica d'una el·lipse) Un punt pertany a una el·lipse de centre (h,k) i eixos major i menor de longituds $2a$ i $2b$, amb $a > b$ si, i només si,*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \textit{l'eix major és horitzontal}$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad \textit{l'eix major és vertical}$$

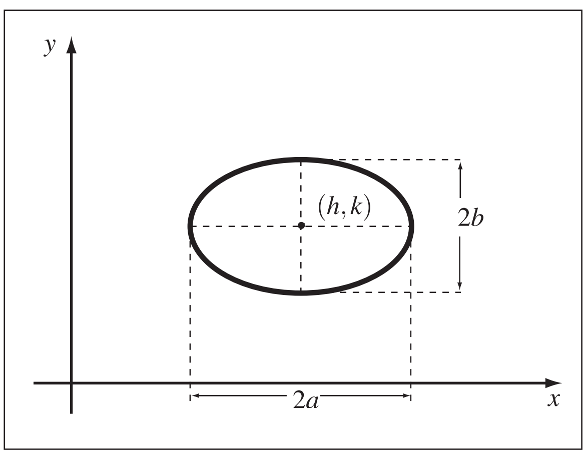


Fig. 5.12 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

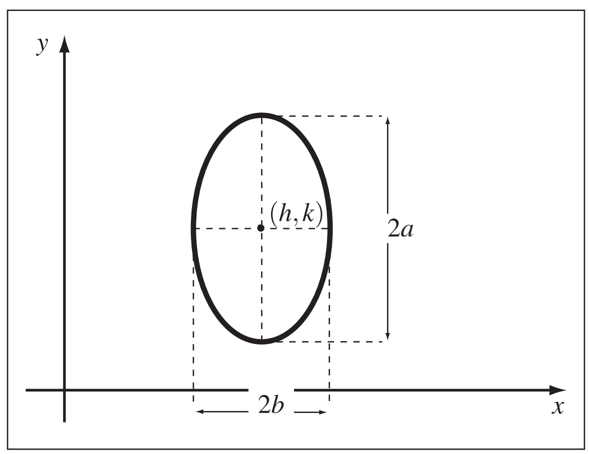


Fig. 5.13 $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

Els focus són a l'eix major, a una distància c del centre, amb $c^2 = a^2 - b^2$.

Definició 5.1.6 *(Excentricitat) Es defineix l'***excentricitat** *e d'una el·lipse com el quocient*

$$e = \frac{c}{a}$$

Observem que com que els focus estan situats a l'eix major entre el centre i els vèrtexs, sempre es compleix

$$0 < c < a$$

per tant, en qualsevol el·lipse $0 < e < 1$.

Si una el·lipse és gairebé circular, e *és gairebé* 0*, en canvi si es tracta d'una el·lipse molt allargada,* e *és gairebé* 1.

A la seva obra *Sobre les revolucions de les esferes celestes* l'astrònom polac Nicholas Copèrnic (1473-1543) afirmava que tots els planetes, inclosa la Terra, giraven en òrbites circulars al voltant del Sol. Encara que moltes afirmacions no eren certes, ell va promoure que molts astrònoms busquessin un model matemàtic que expliqués els moviments dels planetes i del Sol. El primer que ho va trobar va ser l'astrònom alemany Johannes Kepler (1571-1630), que va descobrir que els planetes giren al voltant del Sol amb òrbites el·líptiques amb el Sol col·locat en un dels seus focus.

La dificultat dels astrònoms per detectar les òrbites el·líptiques és perquè aquestes el·lipses tenen els focus molt a prop del centre. Són gairebé circulars, per tant tenen una excentricitat molt a prop de zero.

Com a curiositat direm que l'òrbita de la Lluna té excentricitat $e = 0{,}0549$ i les òrbites dels nou planetes del Sistema Solar tenen excentricitats:

Mercuri	$e = 0{,}2056$
Venus	$e = 0{,}0068$
Terra	$e = 0{,}0167$
Mart	$e = 0{,}0934$
Júpiter	$e = 0{,}0484$
Saturn	$e = 0{,}0543$
Urà	$e = 0{,}0460$
Neptú	$e = 0{,}0082$
Plutó	$e = 0{,}2481$

L'astrònom britànic Edmond Halley (1656-1742) va jugar un paper actiu en les controvèrsies del seu temps. Va donar suport a Newton en la seva disputa amb Leibniz sobre quin dels dos va inventar el Càlcul, i va fer de secretari del Comitè de la Royal Society per resoldre la disputa.

Exemple 5.1.5 *Trobeu el centre, els vèrtexs, els focus i l'excentricitat de l'el·lipse*

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$$

Primer de tot, busquem completant els quadrats l'equació canònica de l'el·lipse:

$$4x^2 - 8x = 4(x^2 - 2x) = 4[(x-1)^2 - 1] = 4(x-1)^2 - 4$$

$$9y^2 + 36y = 9[(y+2)^2 - 4] = 9(y+2)^2 - 36$$

per tant,

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 - 36 = 0$$

d'on

$$4(x-1)^2+9(y+2)^2=36$$

i dividint per 36 tenim l'equació canònica de l'el·lipse

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$$

Així doncs, el centre és $(1,-2)$, els vèrtexs $(-2,-2)$ i $(4,-2)$.

Recordem que els focus estan situats a l'eix major i a distància c del centre, essent $c^2=a^2-b^2$ i en aquest cas $a=3$ i $b=2$. Per tant, $c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ i les coordenades dels focus són $(1-\sqrt{5},-2)$ i $(1+\sqrt{5},-2)$.

L'excentricitat és $e=\dfrac{c}{a}$, per tant en aquest cas

$$e=\frac{\sqrt{5}}{3}=0.7453$$

La representació gràfica d'aquesta el·lipse utilitzant el paquet computacional WIRIS es pot veure a la figura següent (fig. 5.14).

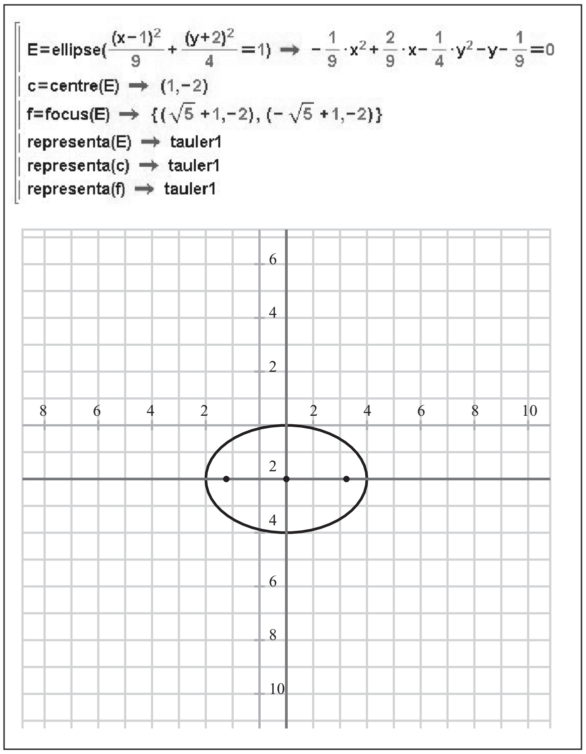


Fig. 5.14

5.1.4 Hipèrbola

Definició 5.1.7 *(Hipèrbola) Una* **hipèrbola** *és el lloc geomètric dels punts del pla tals que la diferència de les seves distàncies a dos punts diferents prefixats (***focus***) és constant.*

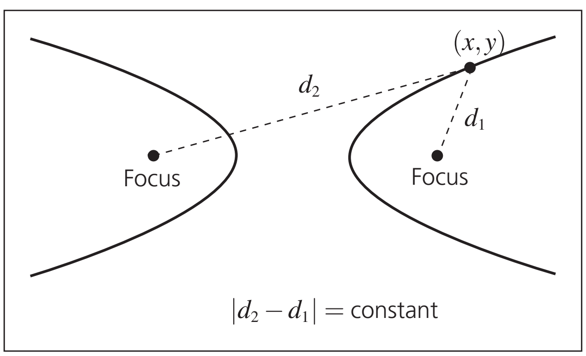


Fig. 5.15

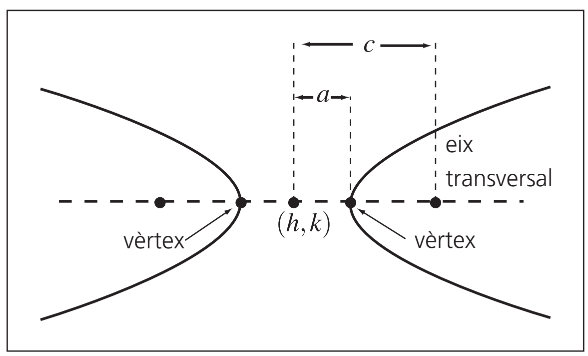


Fig. 5.16

Definició 5.1.8 *La recta que passa pels dos focus talla la hipèrbola en dos punts que s'anomenen* **vèrtexs***. El segment de recta que uneix els vèrtexs s'anomena* **eix transversal** *i el seu punt mitjà és el* **centre** *de la hipèrbola.*

El gràfic de la hipèrbola té dues parts separades que s'anomenen **branques** *de la hipèrbola.*

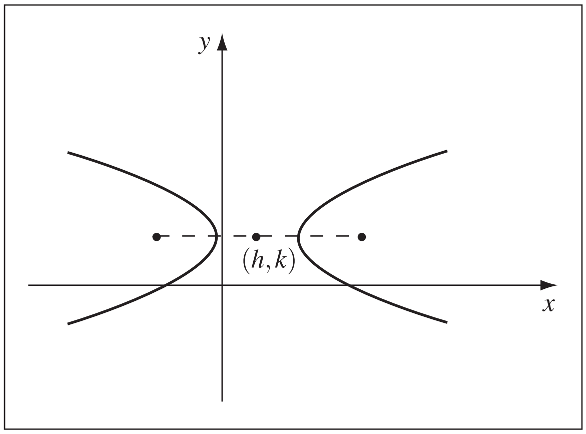


Fig. 5.17 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

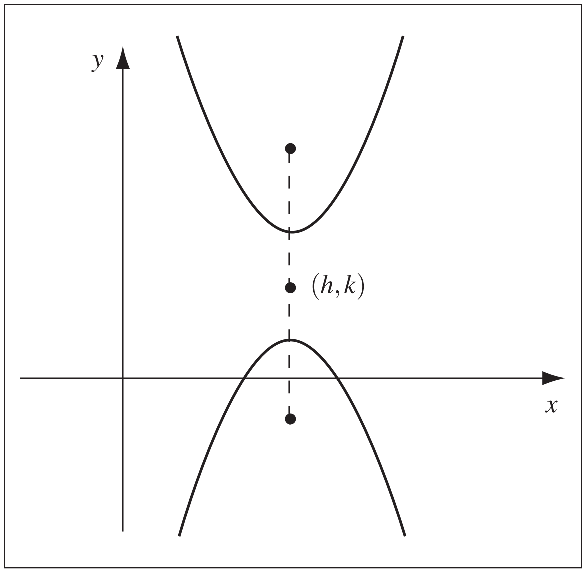


Fig. 5.18 $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}-\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

Propietat 5.1.4 *(Equació canònica de la hipèrbola) Un punt pertany a una hipèrbola de centre (h,k) si, i només si,*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \text{ si l'eix és horitzontal;}$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}-\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \text{ si l'eix és vertical}$$

Els vèrtexs es troben a una distància a del centre i els focus a una distància c del centre, essent

$$c^2=a^2+b^2.$$

Observem que si el centre de la hipèrbola és el punt $(0,0)$ l'equació és:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Si $a=b$ direm que la hipèrbola és **equilàtera**.

Definició 5.1.9 *(Asímptotes) La hipèrbola d'equació*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

té representació gràfica entre les rectes

$$y=\frac{b}{a}x \text{ i } y=-\frac{b}{a}x$$

Aquestes dues rectes s'anomenen **asímptotes**.

Propietat 5.1.5 *Tota hipèrbola*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

té dues asímptotes, rectes que es tallen al centre de la hipèrbola i són les diagonals del rectangle de base $2a$ i alçada $2b$. Les equacions de les asímptotes són:

$$y=k+\frac{b}{a}(x-h) \quad i \quad y=k-\frac{b}{a}(x-h)$$

En cas que l'eix de la hipèrbola sigui vertical, és a dir, si

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

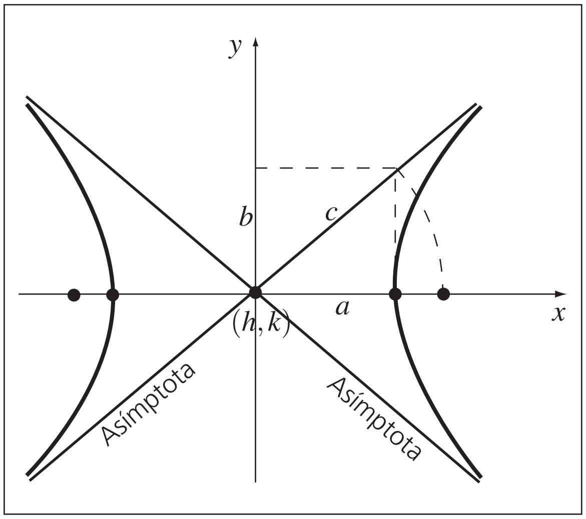


Fig. 5.19

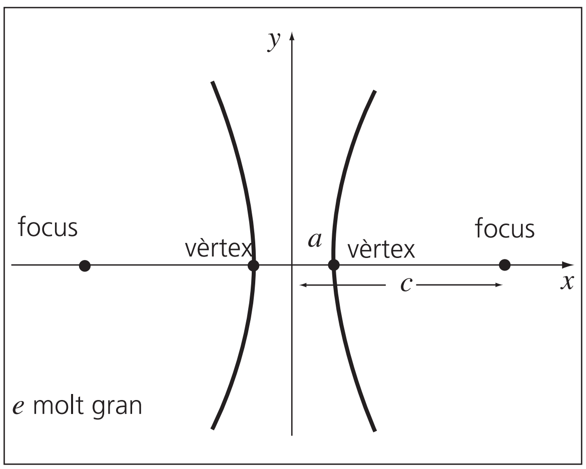


Fig. 5.20

les asímptotes són les rectes d'equació:

$$y = k + \frac{a}{b}(x-k) \quad i \quad y = k - \frac{a}{b}(x-k)$$

Observem que en una hipèrbola equilàtera les dues asímptotes formen angle recte.

Definició 5.1.10 *(Excentricitat) L'***excentricitat** e *d'una hipèrbola ve donada pel quocient*

$$e = \frac{c}{a}$$

(recordem que els vèrtexs de la hipèrbola es troben a una distància a del centre i els focus a una distància c del centre).

Com que en una hipèrbola $c > a$, es dedueix que $e > 1$. Si l'excentricitat és gran, les branques de la hipèrbola són gairebé rectes. Si e s'aproxima a 1, les branques són més punxegudes.

Exemple 5.1.6 *Trobeu el centre, els focus, els vèrtexs, l'excentricitat i les asímptotes de la hipèrbola d'equació*

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Aquesta hipèrbola està centrada al punt $(0,0)$ i com que els focus estan a distància c del centre, essent $c^2 = a^2 + b^2$ tenim que $c^2 = 4 + 9 = 13$.

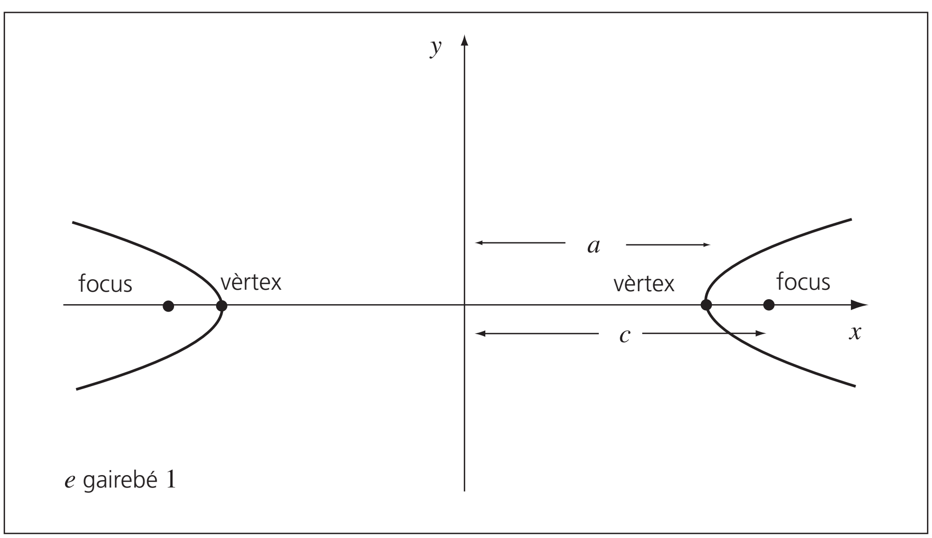


Fig. 5.21

Per tant, la distància c focal és $c = \sqrt{13}$ i els focus són els punts

$$(-\sqrt{13}, 0) \quad \text{i} \quad (\sqrt{13}, 0)$$

L'excentricitat

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2} \cong 1.8$$

De la definició 5.1.9 es dedueix que les asímptotes de la hipèrbola

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

són les rectes

$$y = \frac{3}{2}x \quad i \quad y = -\frac{3}{2}x$$

La representació gràfica d'aquesta hipèrbola utilitzant WIRIS és la següent:

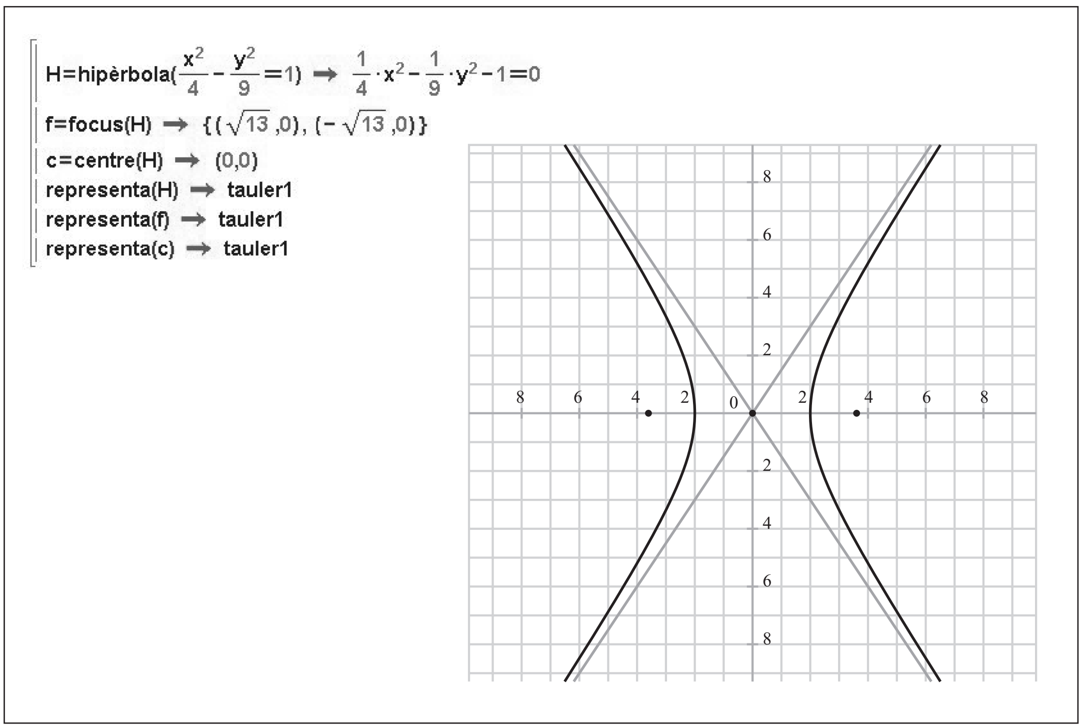


Fig. 5.22

5.1.5 Classificació de les còniques segons la seva equació general

L'equació d'una cònica amb eixos paral·lels a un dels eixos de coordenades té una forma canònica que es pot escriure en la forma general

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Segons els diferents valors de A i C, aquesta equació correspon a:

- Cercle: $A = C$
- Paràbola: $AC = 0$ ($A = 0$ o $C = 0$ però no tots dos)
- El·lipse: $AC > 0$ (A i C tenen el mateix signe)
- Hipèrbola: $AC < 0$ (A i C tenen signe diferent)

Exemple 5.1.7 *El gràfic que correspon a la cònica d'equació*

$$2x^2 - 3x + 2y - 7 = 0$$

és la d'una paràbola, perquè $AC = 2 \cdot 0 = 0$.

Si els eixos de la cònica no són paral·lels als eixos de coordenades, l'equació general de la cònica té un terme amb xy:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

i fent rotació dels eixos es pot passar a una altra equació sense terme xy.

Per consolidar els conceptes d'aquest capítol podeu anar a la pàgina
`http://www.wiris.net/upc.edu/collection`

5.2 Quàdriques

Les quàdriques són una generalització de les còniques a $\mathbb{R}^3$ en el sentit que són figures de l'espai de dimensió 3 definides per polinomis quadràtics en les coordenades (x, y, z).

Definició 5.2.1 *(Quàdriques) Una quàdrica és el gràfic d'una equació de la forma*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

D'aquesta definició es dedueix que les seccions a les quàdriques per plans paral·lels als plans coordenats (plans xy, xz i yz) són seccions còniques.

Hi ha sis tipus bàsics de superfícies quàdriques:

- el·lipsoide
- hiperboloide d'un full (o reglat, perquè conté rectes)
- hiperboloide de dos fulls (o no reglat, perquè no conté rectes)
- con el·líptic
- paraboloide el·líptic (o no reglat)
- paraboloide hiperbòlic (o reglat)

Estudiem ara quines són les *equacions canòniques* i les figures geomètriques associades a cada una d'aquestes superfícies.

5.2.1 El·lipsoide

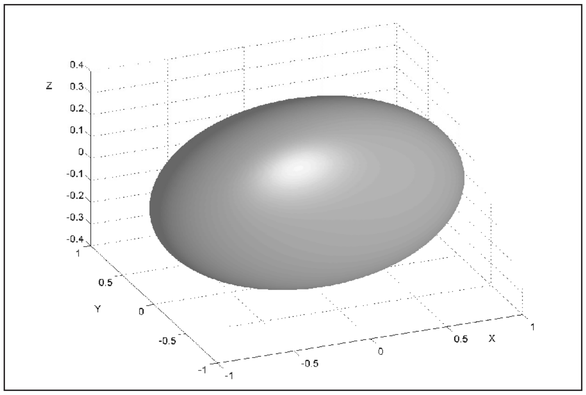


Fig. 5.23 El·lipsoide

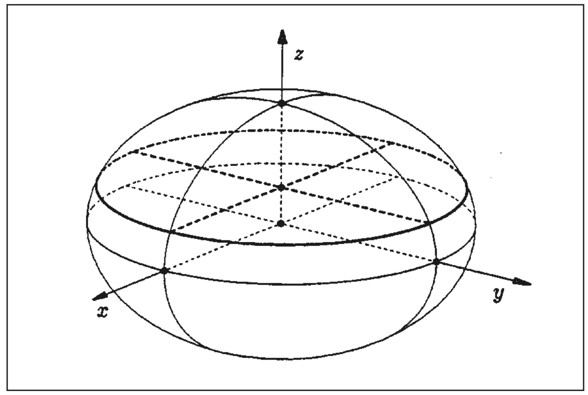


Fig. 5.24

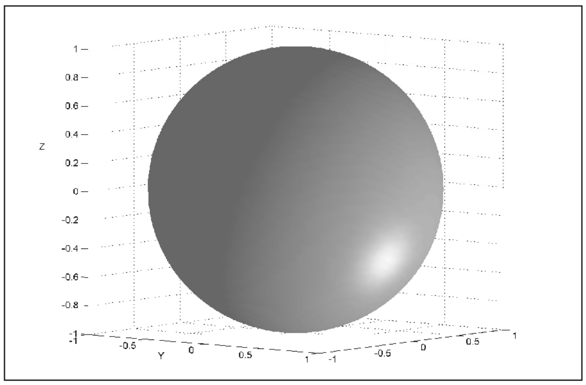


Fig. 5.25 Esfera

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Les seccions per plans paral·lels als plans xy, xz i yz són el·lipses. En el cas particular,

$$a=b=c=r$$

tenim una esfera (fig. 5.25).

5.2.2 Hiperboloide d'un full

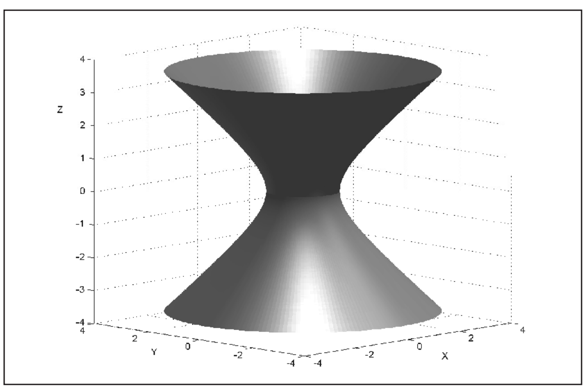


Fig. 5.26 Hiperboloide d'un full

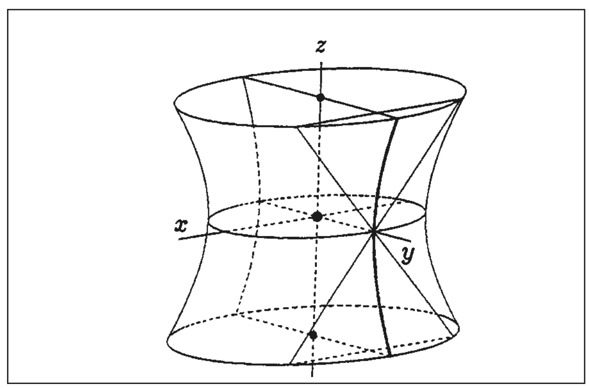


Fig. 5.27

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Les seccions per plans:
- paral·lels al pla xy són el·lipses
- paral·lels al pla xz són hipèrboles
- paral·lels al pla yz són hipèrboles

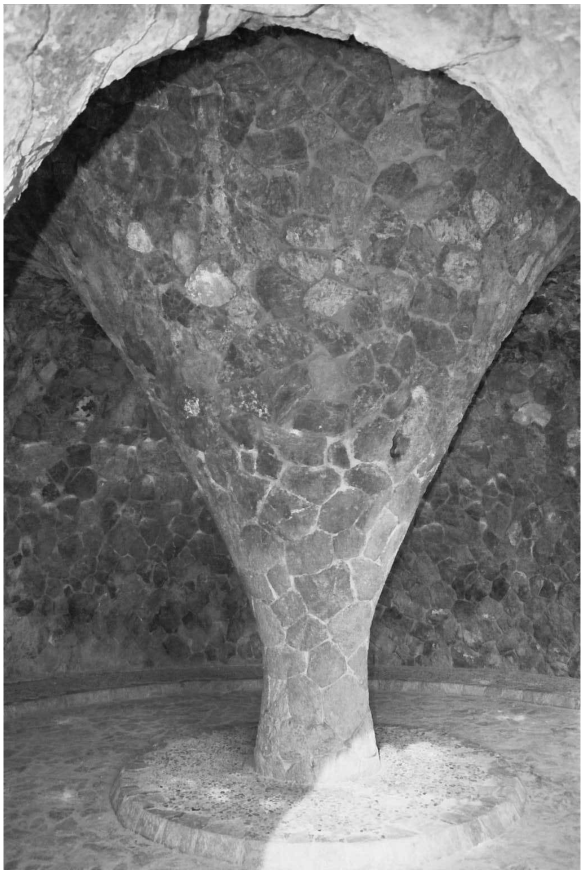


Fig. 5.28 Volta hiperbòlica per al gir de carruatges al Parc Güell

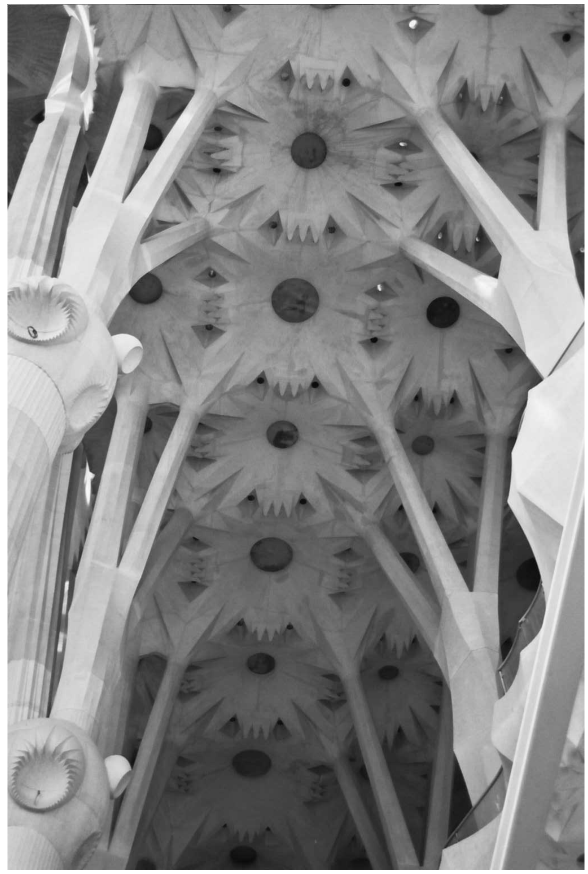


Fig. 5.29 Coberta del temple de la Sagrada Família

Aquestes superfícies reglades es poden trobar aplicades a l'arquitectura, i de manera molt particular en l'arquitectura gaudiniana. Gaudí va incorporar a l'arquitectura l'hiperboloide d'un full després de descobrir que era una forma òptima com a campana. La trobem a la cúpula central de les cavallerisses de la Finca Güell, als capitells del Palau Güell, a la volta per al gir de carruatges a l'entrada del Parc Güell i en el projecte del temple de la Sagrada Família, on es va transformar en la peça fonamental dels sostres de les naus. Per Gaudí, l'hiperboloide d'un full era la superfície que simbolitzava la llum.

5.2.3 Hiperboloide de dos fulls

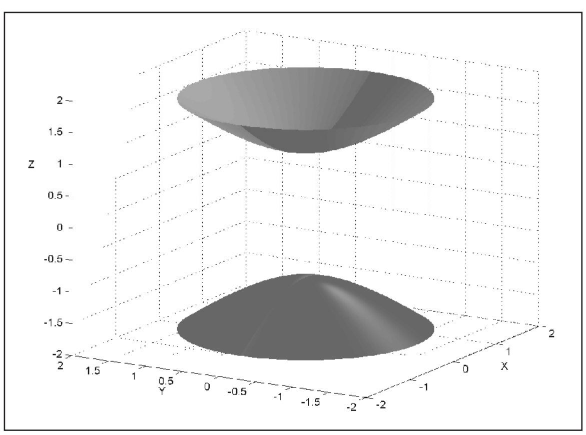


Fig. 5.30 Hiperboloide de dos fulls

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Les seccions per plans:

- paral·lels al pla xy que tallen la quàdrica són el·lipses
- paral·lels al pla xz són hipèrboles
- paral·lels al pla yz són hipèrboles

Observem que en aquest cas no hi ha intersecció de la superfície amb el pla xy.

5.2.4 Con el·líptic

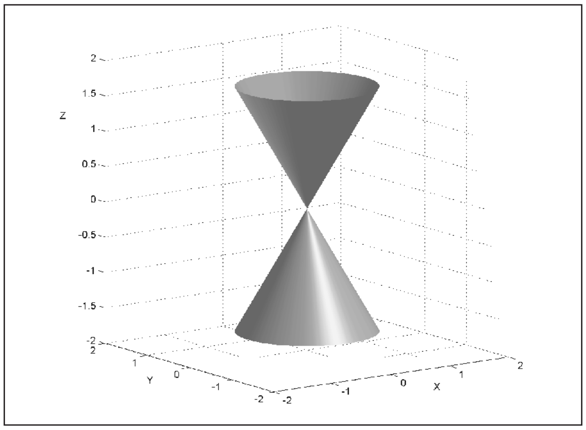


Fig. 5.31 Con el·líptic

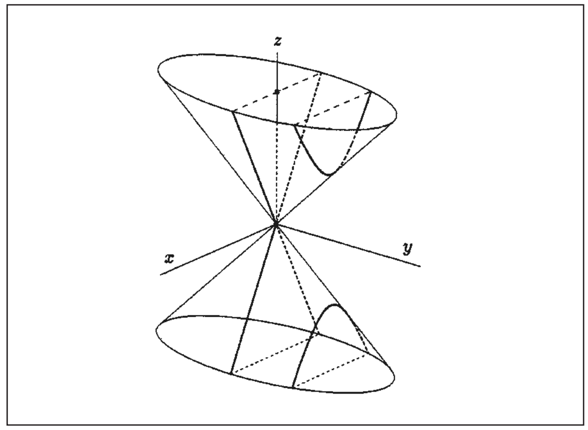


Fig. 5.32

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \left(\text{o bé} \quad z^2=\frac{x^2}{\hat{a}^2}+\frac{y^2}{\hat{b}^2}\right)$$

Les seccions per plans:

- paral·lels al pla xy són el·lipses
- paral·lels al pla xz són hipèrboles
- paral·lels al pla yz són hipèrboles

La intersecció del con amb el pla xy és un punt, i amb els plans xz i yz són parells de rectes secants (que es tallen).

5.2.5 Paraboloide el·líptic

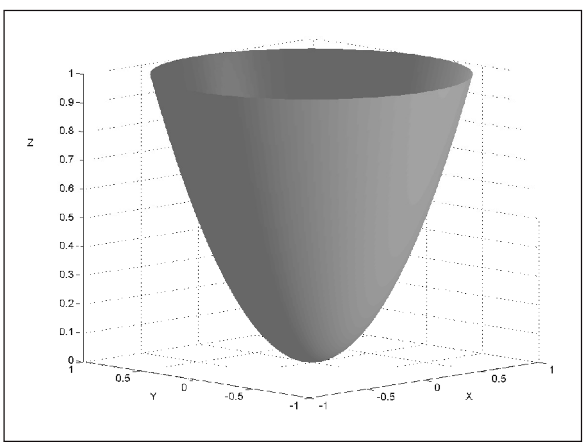


Fig. 5.33 Paraboloide el·líptic

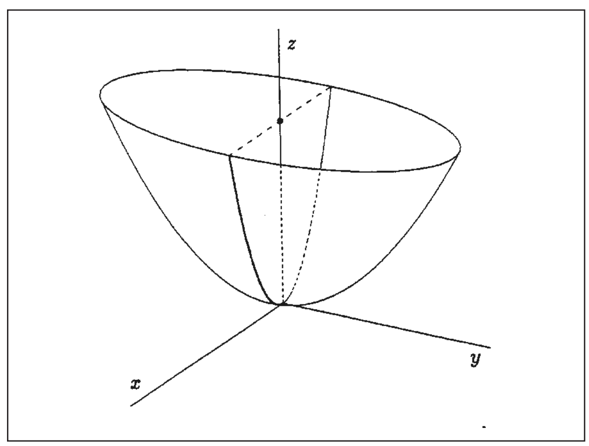


Fig. 5.34

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

Les seccions per plans:

- paral·lels al pla xy són el·lipses
- paral·lels al pla xz són paràboles
- paral·lels al pla yz són paràboles

La intersecció del paraboloide el·líptic amb el pla xy és un punt.

5.2.6 Paraboloide hiperbòlic

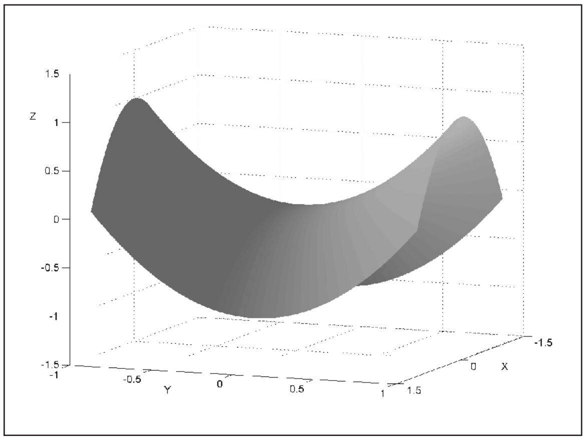


Fig. 5.35 Paraboloide hiperbòlic

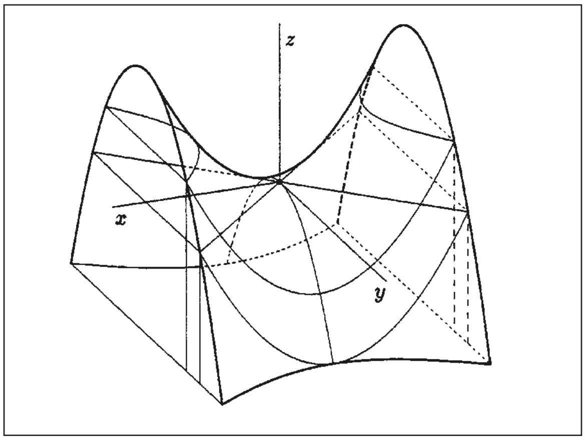


Fig. 5.36

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

Les seccions per plans:

- paral·lels al pla xy són hipèrboles
- paral·lels al pla xz són paràboles
- paral·lels al pla yz són paràboles

La intersecció del paraboloide hiperbòlic amb el pla xy és un parell de rectes.

Fent referència com abans a la geometria gaudiniana, el paraboloide hiperbòlic és una de les superfícies més importants i originals usades per Gaudí. Les primeres presències més importants les trobem al sostre de la Cripta de la Colònia Güell a Santa Coloma de Cervelló, especialment a la zona del pòrtic, i a la coberta del pavelló de l'entrada del Parc Güell a Barcelona. Va ser, però, a la Sagrada Família on els paraboloides hiperbòlics van trobar la seva culminació. Al sostre de les naus laterals, els arbres de columnes són rematats per capitells hiperboloïdals, i els paraboloides hiperbòlics s'utilitzen com a solució per suavitzar la intersecció dels hiperboloides d'un full. La culminació pel que fa a l'ús dels paraboloides hiperbòlics es troba a la coberta superior de les naus i les sagristies, on les dimensions són més grans.

També trobem aplicacions del paraboloide hiperbòlic a l'enginyeria. Com un exemple d'aplicació a l'enginyeria civil a les figures 5.37 i 5.38 tenim unes imatges que fan referència a una maqueta de membrana estructural, per a passarel·la de vianants amb forma de pababoloide hiperbòlic.

Fig. 5.37 Vista lateral de la membrana amb forma de paraboloide hiperbòlic

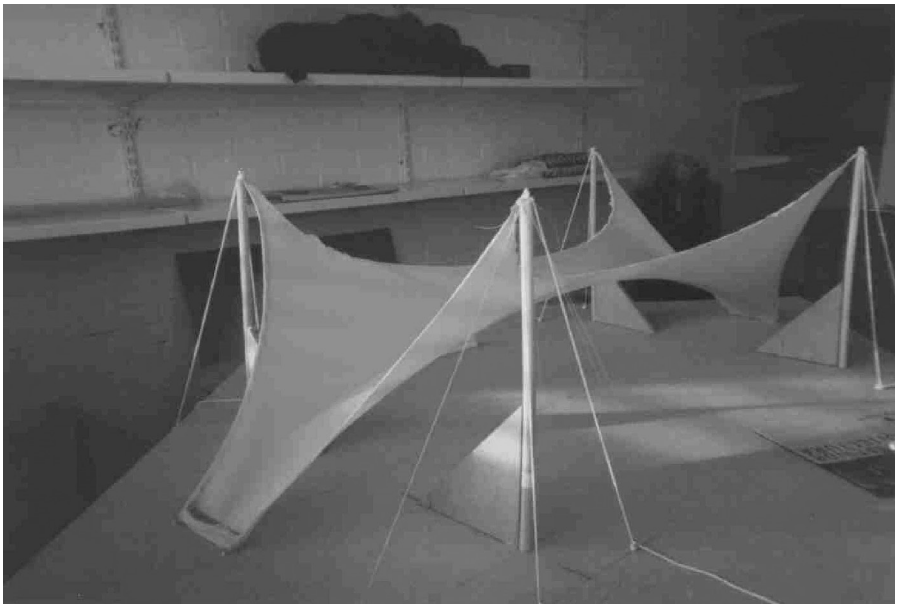


Fig. 5.38 Perspectiva de la membrana amb forma de paraboloide hiperbòlic

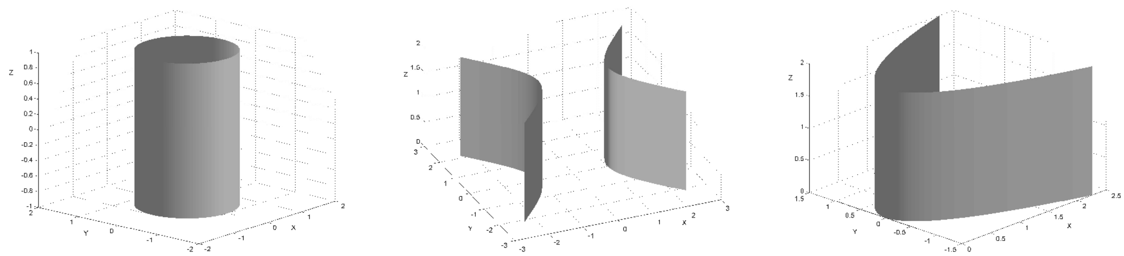
5.2.7 Cilindres

Un polinomi quadràtic en les coordenades x,y

$$ax^2+cy^2+dx+ey+f=0$$

sabem que és una cònica C a $\mathbb{R}^2$; ara bé, si aquest polinomi el mirem a $\mathbb{R}^3$, és a dir, tenint en compte les coordenades (x,y,z), llavors es tracta d'un cilindre. Es diu que és un cilindre de base C i que les rectes per un punt de C paral·leles a OZ són les seves generatrius.

Un cilindre es diu circular, el·líptic, hiperbòlic o parabòlic segons si la seva base és un cercle, una el·lipse, una hipèrbola o una paràbola.



$ax^2 + by^2 = 1$ cilindre el·líptic

$ax^2 - by^2 = 1$ cilindre hiperbòlic

$x = ay^2$ cilindre parabòlic

Fig. 5.39

Igual que es va estudiar amb les còniques, qualsevol quàdrica es pot reduir a l'equació canònica d'alguna de les quàdriques que hem estudiat. A continuació en veurem un exemple.

Exemple 5.2.1

Identifiqueu la quàdrica d'equació

$$3x^2 - 5y^2 + 30z = 0$$

De $3x^2 - 5y^2 + 30z = 0$ aïllant z tenim

$$30z = 5y^2 - 3x^2$$

$$z = \frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{10}$$

per tant, es tracta d'un paraboloide hiperbòlic.

6 Geometria clàssica

En aquest capítol tractem conceptes de geometria clàssica perquè hi haurà molts moments en què el llenguatge geomètric estarà present en assignatures de les diferents titulacions d'enginyeria.

A continuació farem referència a dues aplicacions de la geometria en camps ben diferents.

El projecte Galileu és, actualment, la iniciativa més important en el camp espacial a Europa. Les seves aplicacions més importants seran la localització de vehicles i persones, el control de trànsit terrestre, marítim i aeri, el posicionament d'estructures d'enginyeria civil, la prospecció terrestre i marítima, la cartografia, els ajuts a l'agricultura i la pesca...

Xavier Benedicto, enginyer de telecomunicacions de l'ETSETB i director del projecte Galileu a l'Agència Espacial Europea, va respondre la pregunta, per què 30 satèl·lits i a 23.500 metres d'altura? *"És pura geometria. És per garantir el mateix servei a tot el món sense problemes de densitat. Els nostres estudis ens han demostrat tècnicament i econòmicament que escollim la millor òrbita i el millor nombre de satèl·lits. Si estiguéssim més lluny de la Terra, en podríem tenir menys perquè n'abraçaríem més, però per mantenir la mateixa densitat necessitaríem més potència. Si estiguéssim més a prop, en necessitaríem molts més. A més del col·lapse, els satèl·lits a baixa altura van massa ràpid i podrien ocasionar problemes."*

El text següent fa referència a l'obra de Gaudí.

"En general, i és clar que hi ha excepcions, l'arquitectura convencional s'ha fet a partir d'una geometria que, malgrat emprar formes simples (*com els triangles, els quadrats i els cercles en el pla, i els prismes, els cubs, les piràmides, els cilindres, les esferes, etc., en l'espai*)*, és el resultat de l'aplicació rigorosa del regle i el compàs. Per això, quan Gaudí va descobrir –evidentment, no les va inventar– les denominades superfícies reglades, compostes per línies rectes, que determinen superfícies corbes en l'espai, com el paraboloide, l'hiperboloide, l'helicoide i les que se'n deriven, va trobar un camp d'exploració que el va fascinar tant que hi va dedicar els darrers anys de la seva vida. I és que les superfícies reglades, les quals, d'altra banda, són fàcils de resoldre constructivament, li van permetre ampliar el repertori de les seves formes i aconseguir solucions fins aleshores inèdites, tant com els murs com en les voltes o cobertes.*

Dues són les vies que van portar Gaudí a treballar amb la geometria de l'espai reglat: una és l'anàlisi que des de la seva infantesa havia fet de les formes naturals (*troncs d'arbres, ossos, crustacis, etc.*)*, i l'altra, el seu domini de la geometria de l'espai i la necessitat que tenia d'experimentar amb les tres dimensions.* (...)

La manera com Gaudí entenia la ciència i la tècnica és pròxima a la de Leonardo, que ho pas- sava tot pel sedàs de l'experimentació. Els dos van arribar a la teoria a partir de l'observació i l'anàlisi i, en aquest procés, el dibuix, les maquetes, les provatures, etc. són essencials. Per això Leonardo i Gaudí, Gaudí i Leonardo van poder anar més enllà de les superfícies i descobrir les forces internes dels cossos. Això, no *obstant, la de Gaudí no és una geometria com la que Leonardo va denominar De ludo geometrico, que permet jugar amb les formes i les proporcions. Tot al contrari, la seva és una geometria destinada a facilitar els processos constructius, per treure el màxim profit de les fórmules tradicionals i assegurar l'estabilitat dels edificis. La de Gaudí és una geometria que neix de les descobertes personals que fa després d'una recerca continuada. Gaudí va dir: "Sóc geòmetra, és a dir, sintètic", "Jo ho calculo tot", "La geometria en l'execució de les superfícies no complica, sinó que simplifica la construcció".*[19]

Si voleu ampliar la informació d'aquest capítol, trobareu una bona referència a la pàgina `http://mathworld.wolfram.com/topics/Geometry.html`, i especialment als apartats Plane Geometry i Solid Geometry.

6.1 Polígons

Definició 6.1.1 (*Polígon*) *Un* **polígon** *és una figura plana tancada de n costats rectilinis. Si tots els costats tenen la mateixa longitud i els angles del polígon són iguals, el polígon s'anomena* **regular**.

La paraula *polígon* prové del grec de $\pi o\lambda\upsilon$ (poly) i $\gamma\omega\nu\iota\alpha$ (gonia) que vol dir angle.

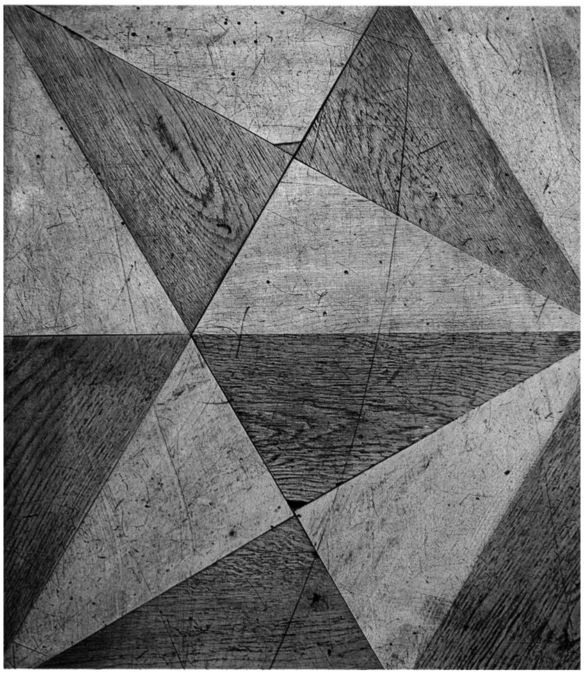


Fig. 6.1 Mosaic de parquet de la Casa Milà

Les formes poligonals planes estàn molt presents en l'obra de Gaudí en dos àmbits: com a formes determinants d'elements constructius (plantes, finestres, separadors, rajoles, etc.) i com a formes generadores de decoració (ceràmica, lletres, trencadís, etc.).

Els polígons plans regulars més usuals són els triangles, els quadrats, els pentàgons, els hexàgons, els octàgons, els decàgons i els dodecàgons. En són exemples emblemàtics, entre d'altres, els triangles de maó de Bellesguard, les rajoles quadrades de la Casa Vicens, les finestres pentagonals del Capricho i les rajoles hexagonals del passeig de Gràcia de Barcelona.

Com a mostra de la creativitat poligonal gaudiniana, podem observar el disseny de les peces de fusta per enrajolar algunes dependències de la Casa Milà. Gaudí va descobrir l'hexàgon regular com a reunió de triangles rectangles i, com que l'hexàgon és una rajola perfecta, el mosaic generat presenta un efecte sorprenent.

A la taula següent hi ha els diferents noms que reben els polígons segons el seu nombre de costats.

n	*polígon*	*n*	*polígon*	*n*	*polígon*
2	dígon	9	enneàgon (nonàgon)	50	pentacontàgon
3	triangle (trígon)	10	decàgon	60	hexacontàgon
4	quadrilàter (tetràgon)	11	hendecàgon (undecàgon)	70	heptacontàgon
5	pentàgon	12	dodecàgon	80	octacontàgon
6	hexàgon	20	icosàgon	90	enneacontàgon
7	heptàgon	30	triacontàgon	100	hectògon
8	octàgon	40	tetracontàgon	1000	miriàgon

Propietat 6.1.1 *L'àrea d'un polígon de vèrtexs* $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ *és*

$$A=\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}\right)$$

L'àrea d'un polígon es defineix positiva si els punts estàn ordenats en el sentit de les agulles del rellotge.

6.1.1 Triangles

Una de les aplicacions dels triangles a l'enginyeria civil és en la discretització de problemes fent servir el **mètode dels elements finits**. Les il·lustracions següents fan referència a un estudi dut a terme sobre el Palau Geraci a Palerm.

Les figures 6.2 i 6.3 corresponen a l'article [6] que fa referència al projecte "Geraci Palace" fet a l'European Laboratory for Structural Assessment (ELSA) en el camp del Patrimoni Cultural. L'objectiu principal del projecte era formular una metodologia d'intervenció per al reforç estructural de les estructures monumentals i valorar la capacitat dels mètodes numèrics disponibles per predir la resposta a terratrèmols d'aquest tipus d'estructures i dissenyar mesures eficients de reforç.

El mètode numèric que s'utilitza en aquest projecte és el métode dels elements finits, mètode que va ser desenvolupat per primera vegada els anys 1950 per a l'anàlisi d'estructures d'avions i poder trobar bons dissenys sense la construcció a priori.

La idea essencial del mètode dels elements finits és descomposar el domini en subdominis més senzills quant a geometria que s'anomenen *elements*, com per exemple triangles (com observem a la figura 6.3) i/o quadrilàters per a regions planes.

Aquest mètode dels elements finits s'utilitza molt com a mètode de càlcul gairebé a totes les enginyeries (civil, mecànica, telecomunicacions, nuclear...) i, d'altra banda, també és un mètode molt important de recerca teòrica i aplicada dins les matemàtiques.

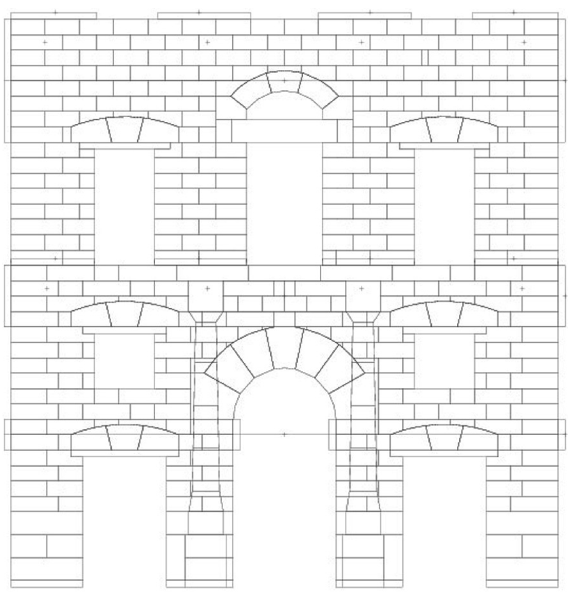


Fig. 6.2

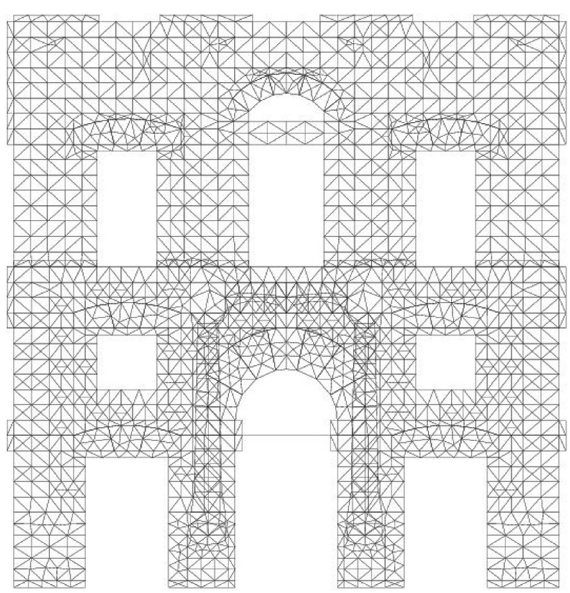


Fig. 6.3

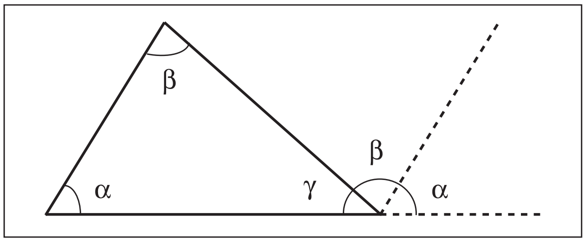


Fig. 6.4

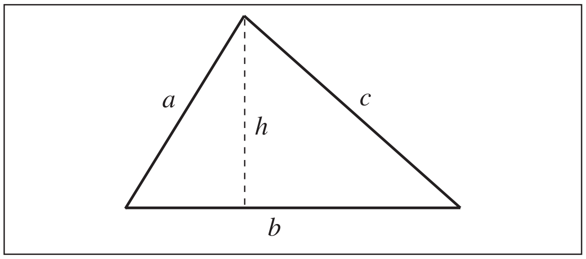


Fig. 6.5

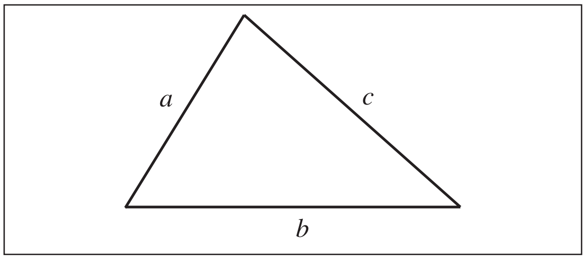


Fig. 6.6

Definició 6.1.2 (*Triangles*) *Els* **triangles** *són polígons de tres costats.*

Propietat 6.1.2 *La suma dels angles d'un triangle és de* 180° *com podem veure fàcilment a la figura 6.4.*

En aquest capítol, com a notació general, A indicarà l'àrea, P el perímetre i V el volum.

Considerem un triangle de base b, alçada h i de costats a, b, c. Aleshores,

$$A = \frac{1}{2}bh \qquad P = a+b+c$$

A continuació donarem una altra manera de calcular l'àrea d'un triangle, utilitzant el semiperímetre i prescindint de les altures.

Propietat 6.1.3 (*Fórmula de Heron*) *Si definim*

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

el semiperímetre d'un triangle aleshores

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Definició 6.1.3 (*Classificació segons la longitud dels costats*)

- *Direm que un triangle és* **equilàter** *si els tres costats tenen la mateixa longitud i els seus angles són iguals.*
- *Si el triangle té dos costats de la mateixa longitud i dos angles iguals direm que és* **isòsceles**.
- *Un triangle amb tots els costats de diferent longitud s'anomena* **escalè**.

Definició 6.1.4 (*Classificació segons el tipus d'angles*)

- *Si els angles d'un triangle són més petits estrictament de* 90° *direm que és* **acutangle**.
- *Si un angle és més gran de* 90° *direm que el triangle és* **obtusangle**.
- *Un triangle amb un angle recte (de* 90°*) s'anomena* **triangle rectangle**.

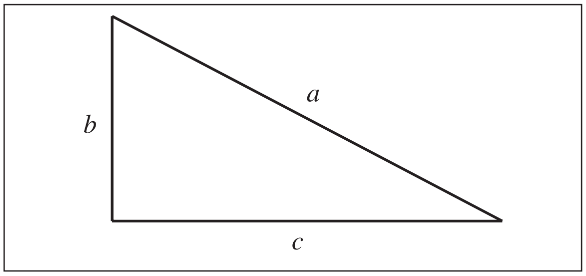


Fig. 6.7

Teorema 6.1.1 (*Teorema de Pitàgores*) *A qualsevol triangle rectangle, la suma dels quadrats dels catets és igual al quadrat de la hipotenusa.*

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Definició 6.1.5 (*Mitjanes i baricentre*) *Les* **mitjanes** *d'un triangle són les rectes que uneixen els seus vèrtexs amb els punts mitjos dels costats oposats corresponents. Les tres mitjanes d'un triangle es tallen en un punt que s'anomena* **baricente**.

Exemple 6.1.1 *Donat un triangle, trobeu amb* WIRIS *les seves mitjanes i el seu baricentre.*

T=triangle(punt(−3,1),punt(2,2),punt(3,−5)) → (−3,1) − (2,2) − (3,−5)

mitjana(T,1),mitjana(T,2),mitjana(T,3) → $y=-\frac{5}{11}\cdot x-\frac{4}{11}, y=2\cdot x-2, y=-\frac{13}{7}\cdot x+\frac{4}{7}$

baricentre(T) → $\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$

dibuixa(T) → tauler1

dibuixa(mitjana(T,1)) → tauler1

dibuixa(mitjana(T,2)) → tauler1

dibuixa(mitjana(T,3)) → tauler1

dibuixa(baricentre(T)) → tauler1

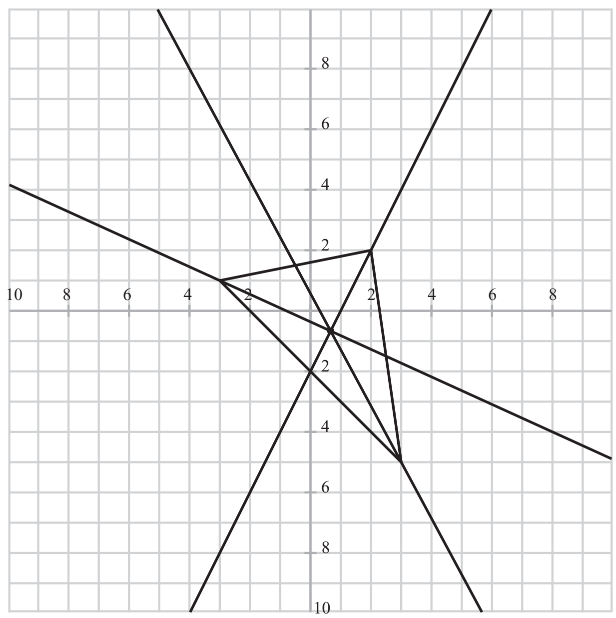


Fig. 6.8

Definició 6.1.6 (*Altures i ortocentre*) *Donat un triangle qualsevol, des de cada vèrtex es pot traçar l'***altura** *o segment perpendicular des del vèrtex al costat oposat. Les altures d'un triangle es tallen en un punt que s'anomena* **ortocentre** *del triangle.*

Observacions

1. Les altures d'un triangle poden quedar dintre o fora del triangle.
2. L'ortocentre d'un triangle rectangle és el vèrtex de l'angle recte i si en un triangle el vèrtex és l'ortocentre, aleshores el triangle és rectangle. (L'ortocentre del triangle és el vèrtex ⇔ el triangle és rectangle en aquest vèrtex.)

Exemple 6.1.2 *Donat un triangle, trobeu amb WIRIS les seves altures i el seu ortocentre.*

T=triangle(punt(−3,1),punt(4,2),punt(3,−5)) → (−3,1) − (4,2) − (3,−5)

altura(T,1),altura(T,2),altura(T,3) → $y=-\frac{1}{7}\cdot x+\frac{4}{7}, y=x-2, y=-7\cdot x+16$

ortocentre(T) → $\left(\frac{9}{4},\frac{1}{4}\right)$

dibuixa(T) → tauler1

dibuixa(altura(T,1)) → tauler1

dibuixa(altura(T,2)) → tauler1

dibuixa(altura(T,3)) → tauler1

dibuixa(ortocentre(T)) → tauler1

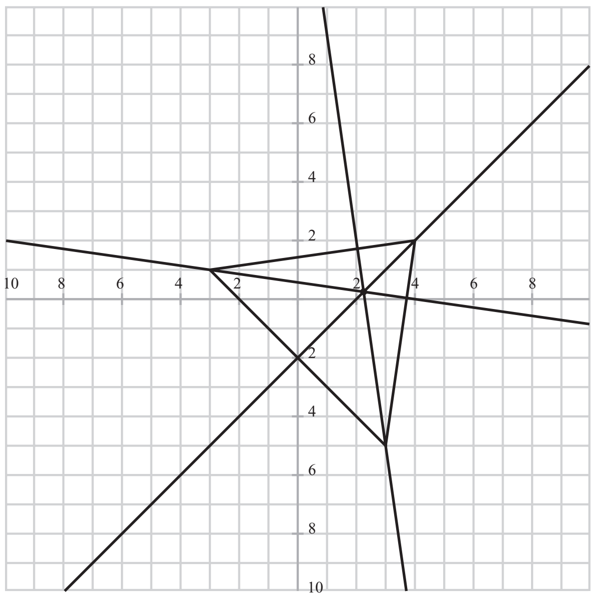


Fig. 6.9

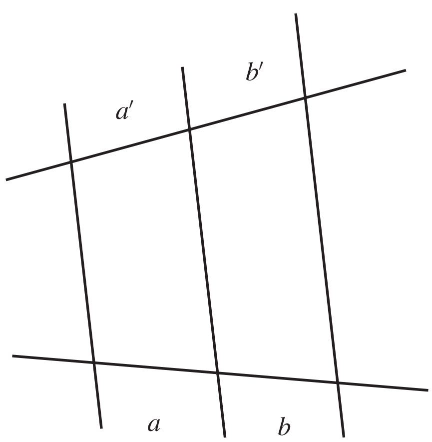


Fig. 6.10

Teorema 6.1.2 (*Teorema de Thales*) *Si dues rectes són tallades per un sistema de rectes paral·leles, els segments així obtinguts sobre una de les rectes són proporcionals als corresponents segments obtinguts sobre l'altra. És a dir,*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

Aquest teorema s'aplica moltes vegades en l'estudi de triangles.

Així doncs, com un cas particular del teorema de Thales deduïm que a la figura següent (fig. 6.11)

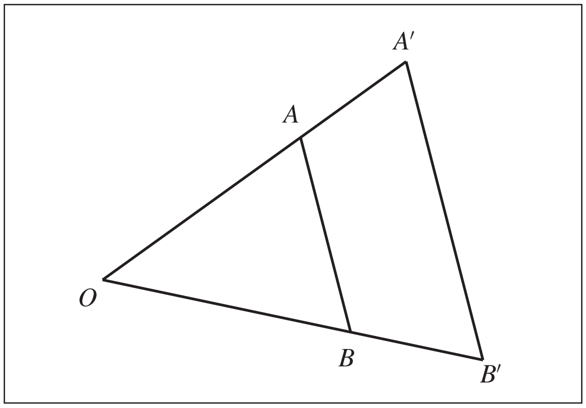


Fig. 6.11

es compleix que

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$$

si $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ són paral·lels.

Definició 6.1.7 (*Triangles semblants*) *Direm que dos triangles són* **semblants** *si tenen dos angles iguals. Observem que del teorema de Thales es dedueix que dos triangles semblants tenen els costats corresponents proporcionals. El quocient entre dos costats s'anomena raó de semblança.*

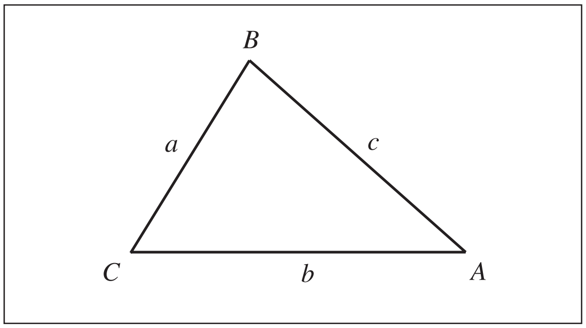


Fig. 6.12

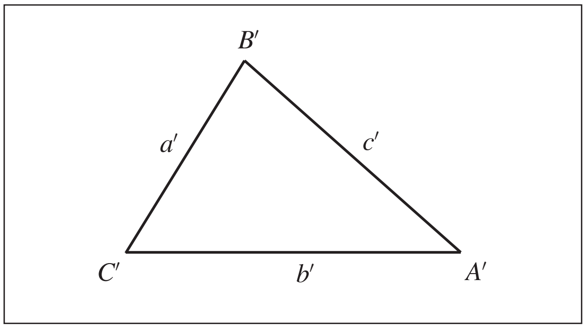


Fig. 6.13

Propietat 6.1.4 (*Criteris de semblança*) *Els triangles ABC i $A'B'C'$ són semblants i es compleix una de les condicions següents:*

1. $A = A'$ *i* $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

   (és a dir, un angle igual i els corresponents costats proporcionals)

2. $A = A'$ *i* $B = B'$

   (és a dir, dos triangles són semblants si tenen iguals dos angles corresponents)

3. $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

   (és a dir, dos triangles són semblants si els corresponents costats són proporcionals)

6.1.2 Quadrilàters

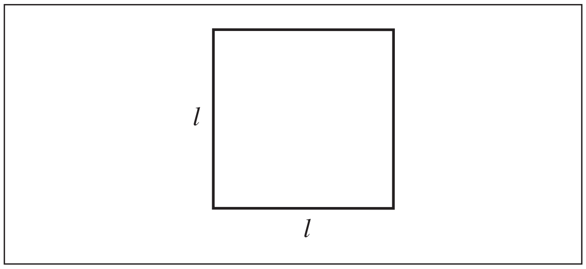


Fig. 6.14

Definició 6.1.8 (*Quadrilàters*) *Els* **quadrilàters** *són polígons de quatre costats.*

Quadrat

Un quadrat és un quadrilàter amb quatre costats iguals i quatre angles rectes.

$$A = l^2 \qquad P = 4l$$

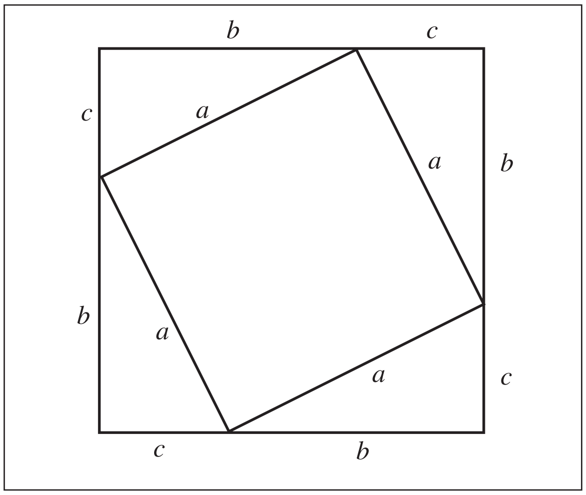


Fig. 6.15

Amb les àrees de quadrats i de triangles podem fer una demostració geomètrica del teorema de Pitàgores. Veure la figura 6.15.

Observem que

$$(b+c)^2 = a^2 + 4\frac{1}{2}bc$$

d'on

$$b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 2bc$$

i, per tant,

$$b^2 + c^2 = a^2 \qquad \text{q.e.d.}$$

Rectangle

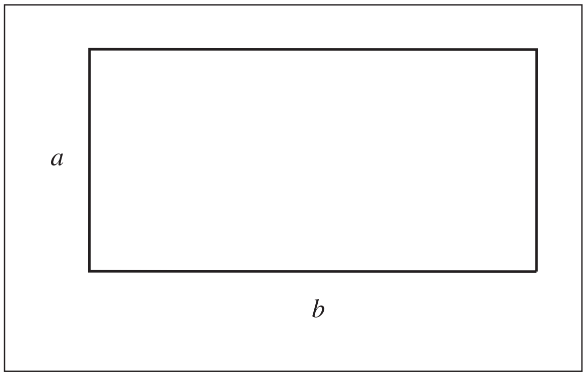


Fig. 6.16

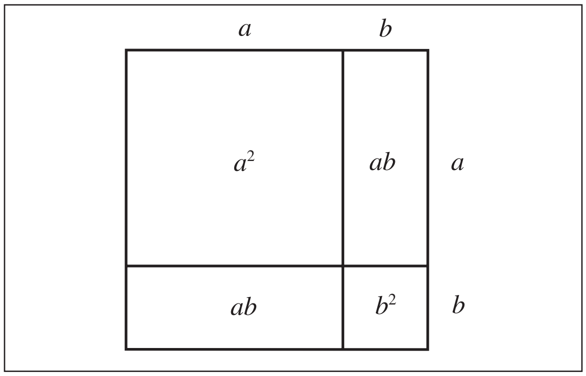


Fig. 6.17

Un rectangle és un quadrilàter amb costats oposats de la mateixa longitud a i b, i amb quatre angles rectes.

$$A = ab \qquad P = 2a + 2b$$

Tal com hem vist abans, les àrees de quadrats i rectangles també permeten fer algunes demostracions geomètriques, per exemple, la identitat $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ resulta evident de la figura (fig. 6.17).

Paral·lelogram

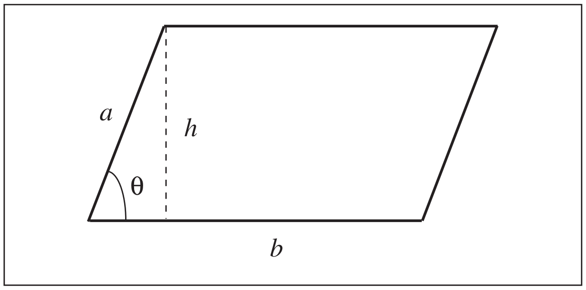


Fig. 6.18

Un paral·lelogram és un quadrilàter amb costats oposats paral·lels (i, per tant, amb angles oposats iguals).

$$A = bh = ab\sin\theta$$

Un paral·lelogram amb cares iguals s'anomena **rombe** i un cas particular, el rectangle, és quan tots els angles són rectes.

Trapezi

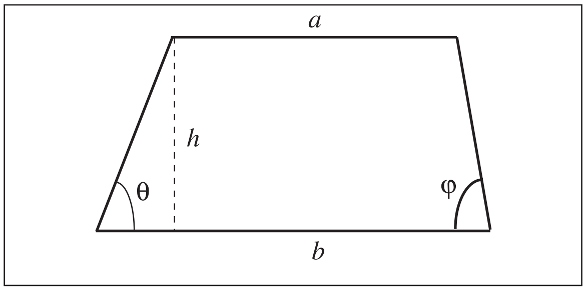


Fig. 6.19

Un trapezi és un quadrilàter amb dos costats paral·lels.

$$A = \frac{1}{2}h(a+b)$$

$$P = a+b+h\left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin\varphi}\right)$$

a s'anomena base menor i b base major.

6.1.3 Polígons regulars de n costats

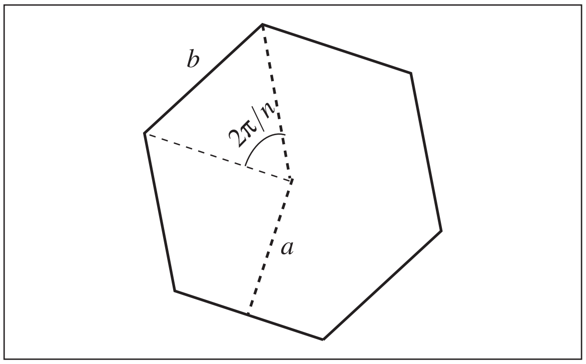


Fig. 6.20

$$A = \frac{1}{4}nb^2\cot\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}nab$$

$$P = nb$$

$[a = \text{apotema}]$

6.2 Cercles

L'estudi del cercle es remunta a la història antiga, i és la invenció de la roda un descobriment fonamental de les propietats del cercle. Els primers teoremes relacionats amb els cercles s'atribueixen a Thales al voltant de l'any 650 aC i el Llibre III dels *Elements* d'Euclides tracta amb propietats dels cercles i problemes d'inscripció i circumscripció de polígons.

Un dels problemes dels matemàtics grecs va ser el de trobar un quadrat amb la mateixa àrea que un cercle donat. Moltes de les "corbes famoses" van ser estudiades per primera vegada en la temptativa de solucionar aquest problema. Anaxàgores el 450 aC és el primer matemàtic reconegut que va estudiar aquest problema.

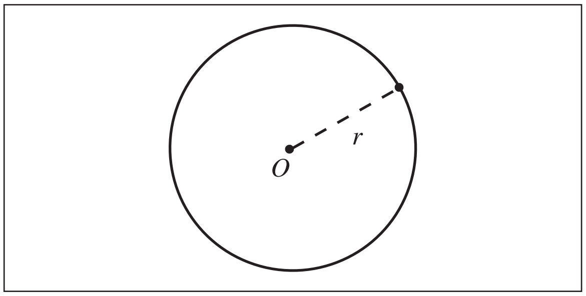


Fig. 6.21

Definició 6.2.1 (*Cercle*) *Un* **cercle** *és la porció d'un pla limitada per una circumferència. El diàmetre del cercle és dues vegades el radi*

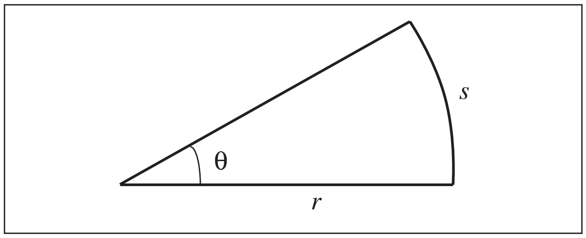
$$d = 2r$$

Al perímetre C d'un cercle se l'anomena **circumferència**.

$$A = \pi r^2$$

$$C = 2\pi r$$

Sector circular



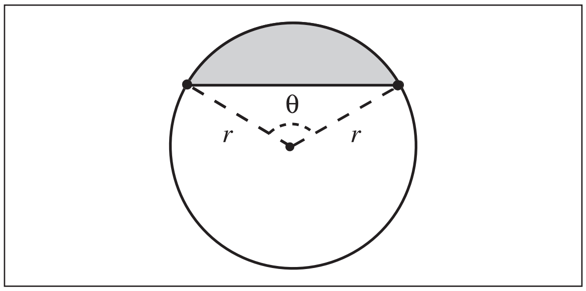
$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$s = r\theta$$

si l'angle θ es mesura en radians

Fig. 6.22

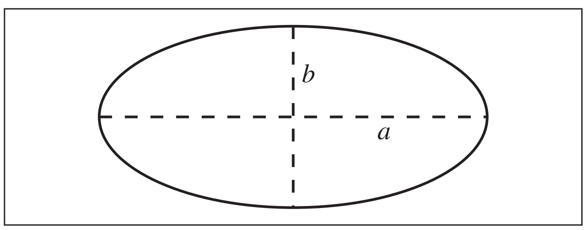
Segment d'un cercle de radi *r*



$$A = \frac{1}{2} r^2 (\theta - \sin\theta)$$

Fig. 6.23

Regió el·líptica



$$A = \pi ab$$

Fig. 6.24

Observem que el cercle és un cas particular d'una regió el·líptica (quan $a = b$).

Definició 6.2.2 *Una* **circumferència inscrita** *a un polígon és una circumferència tal que tots els costats del polígon li són tangents.*

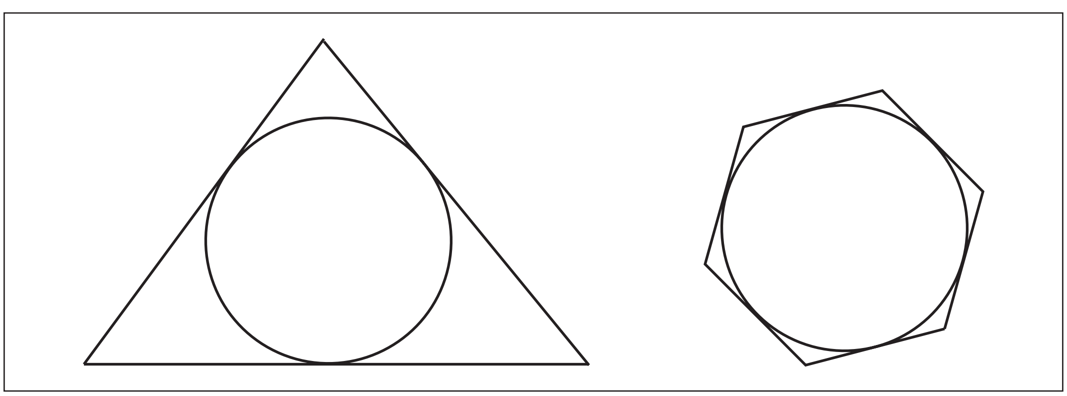


Fig. 6.25

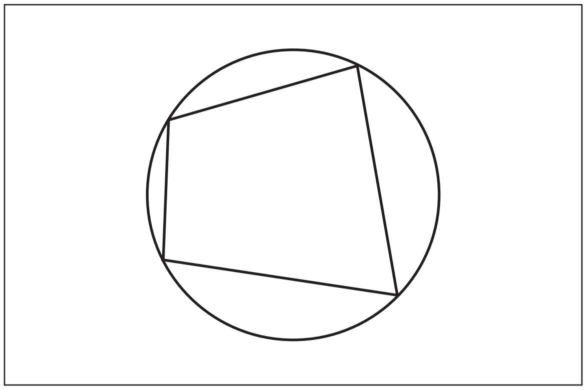


Fig. 6.26

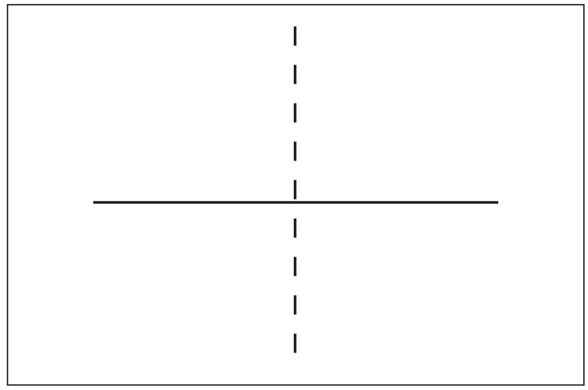


Fig. 6.27 Mediatriu d'un segment

També es diu que el polígon està circumscrit a la circumferència.

Una circumferència està **circumscrita** *a un polígon si la circumferència passa per cada un dels vèrtexs del polígon.* Veure la figura 6.26.

Direm que el polígon està inscrit a la circumferència.

Definició 6.2.3 (*Mediatrius i circumcentre*) *La recta perpendicular al punt mitjà d'un segment, anomenada* **mediatriu**, *té tots els punts equidistants dels extrems del segment.*

En un triangle, les rectes mediatrius es tallen en un únic punt que s'anomena **circumcentre** *que, en equidistar dels tres vèrtexs, esdevé centre de la circumfèrencia circumscrita al triangle.*

Exemple 6.2.1 *Donat un triangle, trobeu amb* WIRIS *el seu circumcentre i la seva circumferència circumscrita.*

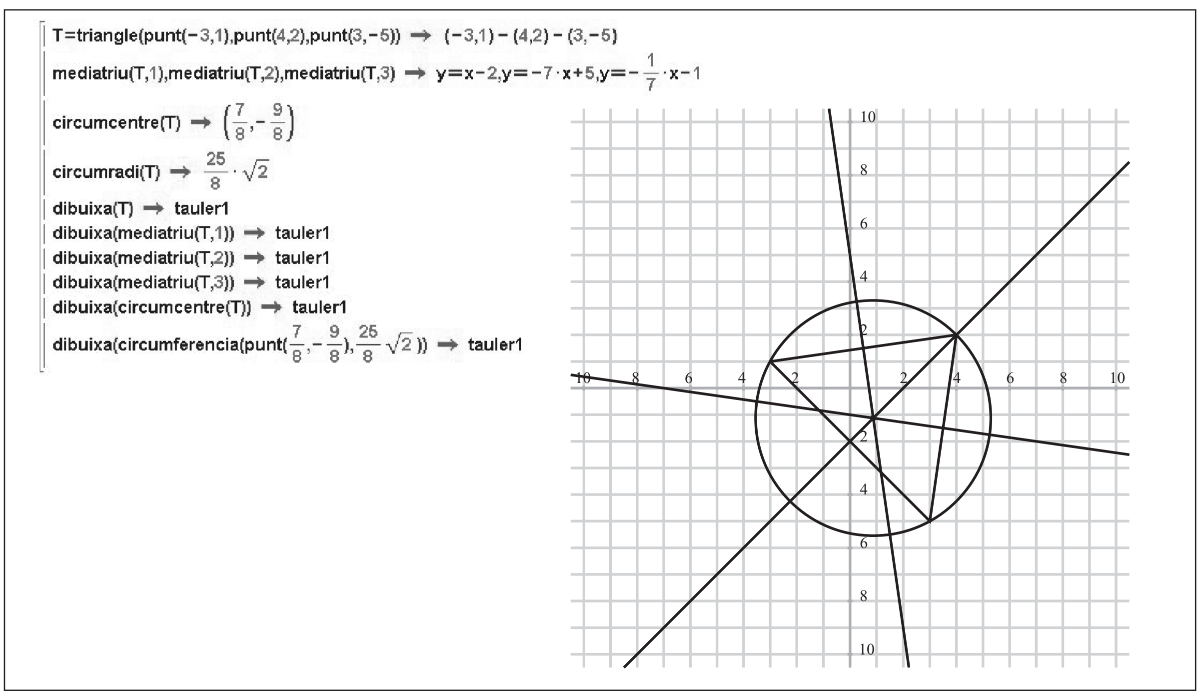


Fig. 6.29

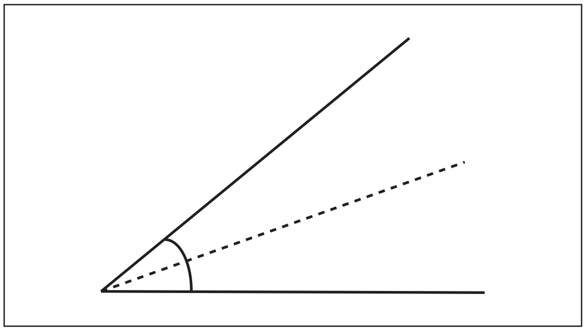


Fig. 6.29 Bisectriu d'un angle

Definició 6.2.4 (*Bisectrius i incentre*) *Donat un angle, la* **bisectriu** *és la recta que divideix l'angle en dues parts iguals.*

Les tres bisectrius d'un triangle es tallen en un únic punt que s'anomena **incentre**, *que és el centre de la circumferència inscrita al triangle.*

Exemple 6.2.2 *Donat un triangle, trobeu amb* WIRIS *el seu incentre i la seva circumferència inscrita.*

T=triangle(punt(−3,1),punt(4,2),punt(3,−5)) → $(-3,1)-(4,2)-(3,-5)$

bisectriu(T,1),bisectriu(T,2),bisectriu(T,3) → $y=-\frac{1}{3}\cdot x, y=x-2, y=-3\cdot x+4$

incentre(T) → $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$

inradi(T) → $\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}$

dibuixa(T) → **tauler1**

dibuixa(bisectriu(T,1)) → **tauler1**

dibuixa(bisectriu(T,2)) → **tauler1**

dibuixa(bisectriu(T,3)) → **tauler1**

dibuixa(incentre(T)) → **tauler1**

dibuixa(circumferencia(punt($\frac{3}{2},-\frac{1}{2}$**),**$\frac{3}{2}\sqrt{2}$**))** → **tauler1**

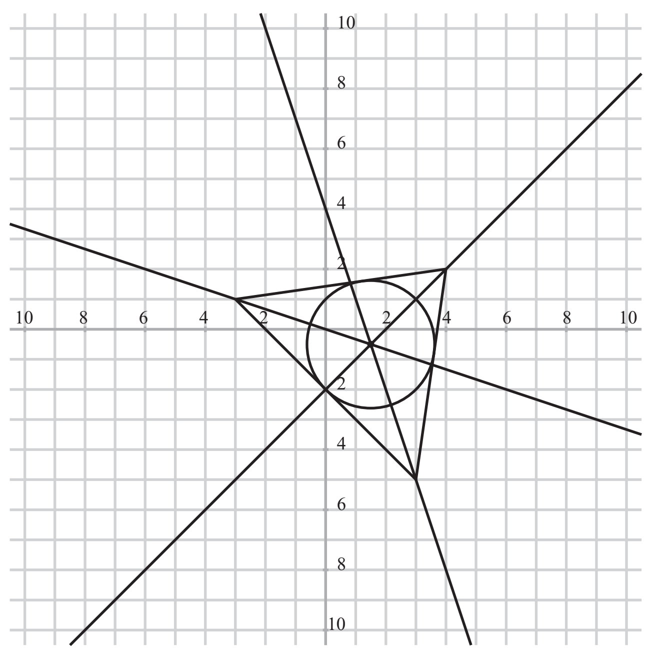


Fig. 6.30

6.3 Sòlids

En aquest apartat destacarem alguns dels sòlids més interessants i donarem les fórmules d'àrees de superfícies i volums corresponents.

Paral·lelepípede rectangular

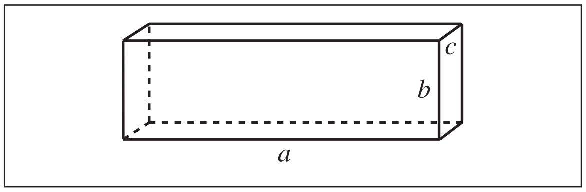


Fig. 6.31

$$V = abc$$
$$A = 2\,(ab + ac + bc)$$

Si $a = b = c$ s'anomena **cub**

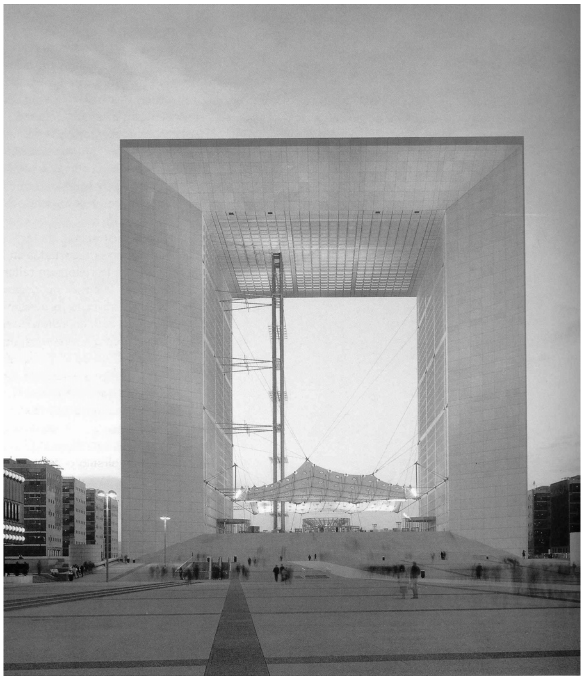


Fig. 6.32 Le Grand Arche (La Défense, París)

Le Grand Arche (La Défense, París) és un paral·lelepípede que és gairebé un cub (108 m de costat, 110 m d'altura i 112 m de profunditat).

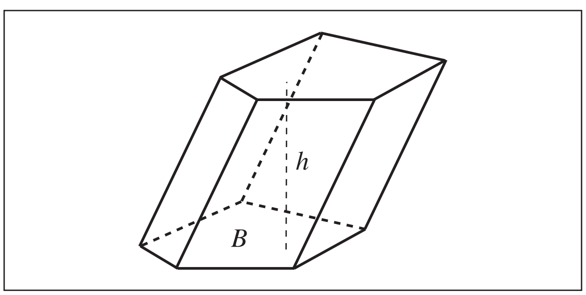


Fig. 6.33

Prisma

$$V = Bh$$

amb B l'àrea de la base

Observem que un cub és un prisma on totes les cares són quadrades.

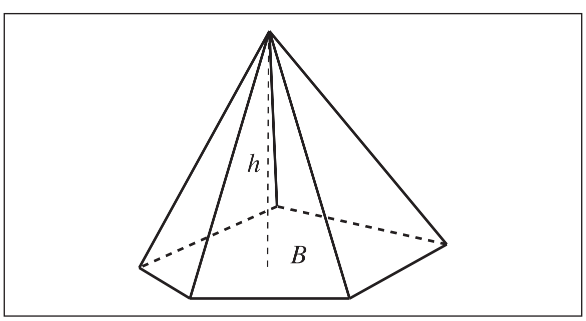


Fig. 6.34

Piràmide

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

amb B l'àrea de la base

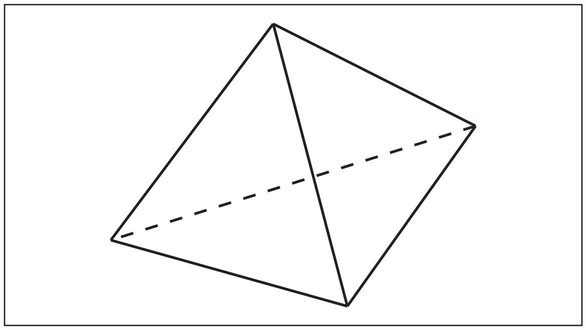


Fig. 6.35

Definició 6.3.1 (*Tetraedre*) *Un* **tetraedre** *és una piràmide on totes les cares són triangles equilàters.*

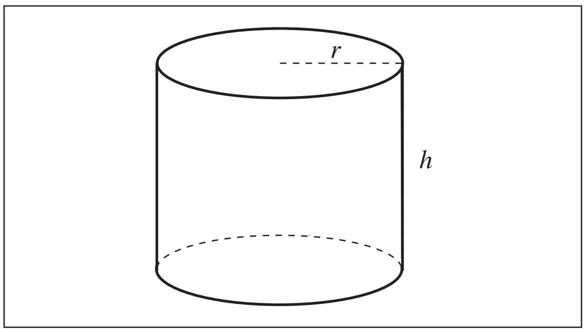


Fig. 6.36

Cilindre circular recte

$$V = \pi r^2 h$$

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$\text{superfície lateral} = 2\pi rh$$

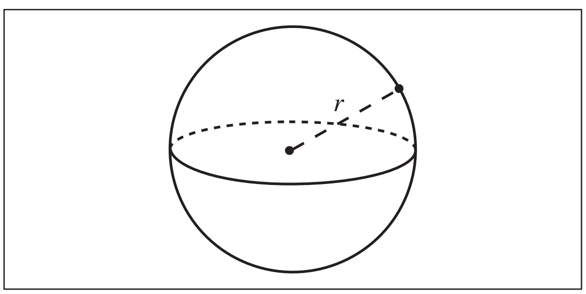


Fig. 6.37

Esfera de radi r

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$S = 4\pi r^2$$

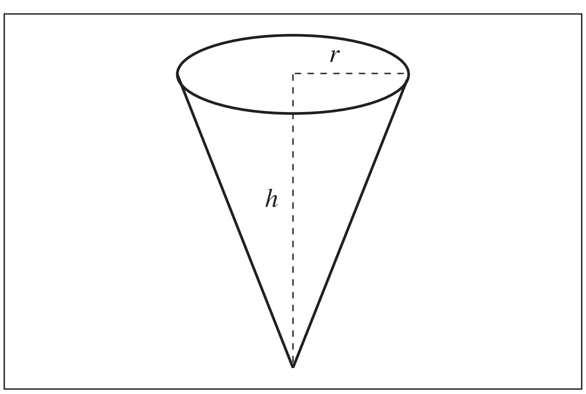


Fig. 6.38

Con circular recte

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\text{Àrea de la superfície lateral} = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

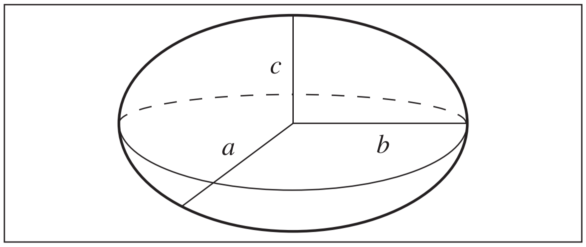


Fig. 6.39

El·lipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$V=\frac{4}{3}\pi abc$$

Per consolidar conceptes de geometria podeu visualitzar la pàgina
`http://www.wiris.net/upc.edu/collection`

7 Nombres complexos

A principis del segle XIX, Karl Friedrich Gauss (1777-1855) i William Rowan Hamilton (1805-1865) independentment i gairebé al mateix temps van proposar la idea de definir els nombres complexos com a parells ordenats (a,b) de nombres reals que tenen unes certes propietats. Aquesta idea és la que us presentem a continuació.

7.1 Definicions

Definició 7.1.1 (*Nombre complex*) *Es defineix el conjunt $\mathbb{C}$ dels nombres complexos com el producte cartesià*

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) \mid a,b, \in \mathbb{R}\}$$

és a dir, que un nombre complex s'identifica amb un punt del pla.

Si $z = (a,b)$ és un nombre complex, direm que a és la part real *de z i s'escriu $Re(z)$ i que b és la part* imaginària *de z que escriurem $Im(z)$. Direm que $z = (a,b)$ està expressat en* forma cartesiana.

Definició 7.1.2 (*Operacions suma i producte*) *Si (a,b) i (c,d) són dos nombres complexos, definim*

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Amb aquestes operacions, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ és un cos conmutatiu.

Definició 7.1.3 (*Unitat imaginària*) *Es defineix i el nombre complex $i = (0,1)$.*

En assignatures, com per exemple electrotècnica, la unitat imaginària s'acostuma a escriure amb la lletra j.

Observem que $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$. Com que els nombres complexos de la forma $(a,0)$ tenen exactament el mateix comportament respecte a la suma i multiplicació de nombres complexos que els nombres reals respecte a les seves operacions de suma i producte, escriurem $(a,0)$ simplement com a a.

Per tant,

$$i^2 = -1$$

Observeu que $\sqrt{-1} = \pm i$, per tant, quan treballem amb nombres complexos té sentit treballar amb arrels de nombre negatiu, cosa que no té sentit quan estem en $\mathbb{R}$.

Fixem-nos que podem escriure

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) = a + bi$$

Aquesta és una forma molt habitual d'escriure els nombres complexos i s'anomena **forma binòmica**.

Definició 7.1.4 (*Oposat*) *Si $z = (a,b)$ direm que l'***oposat** *de z és el nombre complex*

$$-z = (-a,-b)$$

Definició 7.1.5 (*Conjugat*) *Si $z = a + bi$ definim el seu* **conjugat**, *que escriurem $\overline{z}$, com a*

$$\overline{z} = a - bi$$

Definició 7.1.6 (*Invers*) *Si $z = a + bi$, amb $(a,b) \neq (0,0)$, es defineix el nombre complex* **invers** *de z, que escriurem z^{-1}, com a*

$$z^{-1} = \frac{1}{a+bi}$$

Vegem ara quina és en aquest cas la seva part real i la seva part imaginària,

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

Comproveu que

$$(a,b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) = (1,0)$$

Definició 7.1.7 (*Mòdul*) *Si $z = a + bi$ és un nombre complex, definim el seu* **mòdul**, *que escriurem $|z|$, com a*

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Observeu que $|z|$ és la distància de z a $(0,0)$. En general, la **distància** *entre dos nombres complexos z i w es defineix com a $|z-w|$*

Propietat 7.1.1 *Si z i w són nombres complexos, es compleix*

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z} = z \Leftrightarrow z$ *és real*
3. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
4. $\overline{-z} = -(\overline{z})$
5. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
6. $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$, *si $z \neq 0$*
7. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

8. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
9. $|z + w| \leq |z| + |w|$

Exemple 7.1.1 *Proveu que si $z, z' \in \mathbb{C}$, es verifica que:*

$$|z|^2 + |z'|^2 = \frac{1}{2}(|z+z'|^2 + |z-z'|^2)$$

Aplicant la propietat $|z|^2 = z\overline{z}$, obtenim:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(|z+z'|^2 + |z-z'|^2) &= \frac{1}{2}((z+z')(\overline{z+z'}) + (z-z')(\overline{z-z'}) = \\
&= \frac{1}{2}((z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) + (z-z')(\overline{z}-\overline{z'})) = \\
&= \frac{1}{2}(z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z} - z\overline{z'} - z'\overline{z} + z'\overline{z'}) = \\
&= \frac{1}{2}(2z\overline{z} + 2z'\overline{z'}) = z\overline{z} + z'\overline{z'} = |z|^2 + |z'|^2
\end{aligned}$$

Exemple 7.1.2 *Calculeu $z \in \mathbb{C}$ perquè z, $\dfrac{1}{z}$ i $1 - z$ tinguin el mateix mòdul.*

Si $z = x + yi$ tindrem:

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{x^2+y^2} \\
\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
|1-z| &= |(1-x) - yi| = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Igualant les expressions:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+y^2} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow x^2+y^2 = 1 \\
\sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{(1-x)^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2 = 1 - 2x + x^2 + y^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Falta trobar la y:

$$x = \frac{1}{2} \ \text{ i } \ x^2+y^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$

per tant, els nombres complexos són:

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{i} \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

7.2.1 Interpretació geomètrica dels nombres complexos

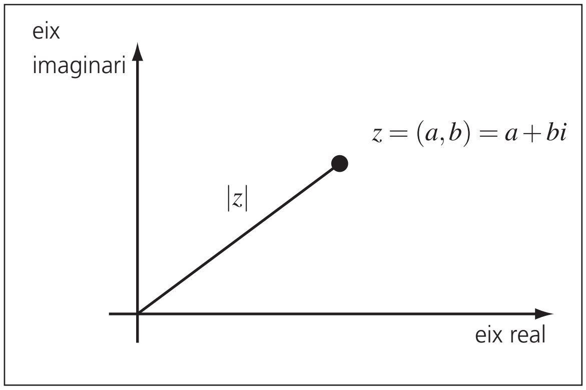


Fig. 7.1

7.2.2 Interpretació geomètrica de la suma de nombres complexos

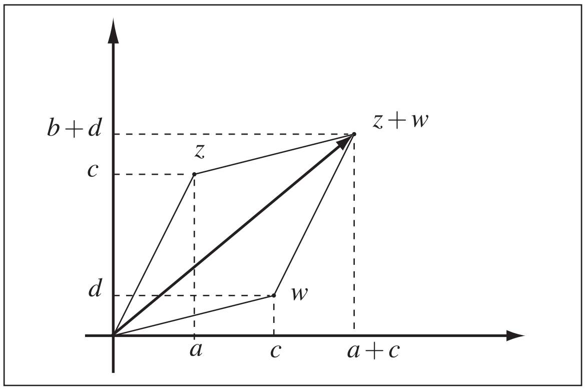


Fig. 7.2

Si $z=(a,b)$ i $w=(c,d)$ són dos nombres complexos, determinen un paral·lelogram, tal que dos dels seus costats són els segments rectilinis de $(0,0)$ a z i de $(0,0)$ a w. El vèrtex oposat a $(0,0)$ és el nombre complex $z+w$.

7.2.3 Interpretació geomètrica del producte de nombres complexos

La interpretació geomètrica del producte és més complicada i per ajudar a intuir-ne la interpretació introduirem una nova forma de representar els nombres complexos.

Suposem que z i w són dos nombres complexos diferents de zero. Observem que si $z=0$ o bé $w=0$ aleshores $z\cdot w=0$.

Per a qualsevol $z\in\mathbb{C}$, $z\neq 0$ podem escriure

$$z=|z|\frac{z}{|z|}$$

on $|z|$ és un nombre real positiu i $\dfrac{z}{|z|}$ és un nombre complex de mòdul 1, perquè

$$\left|\frac{z}{|z|}\right|=\frac{|z|}{|z|}=1$$

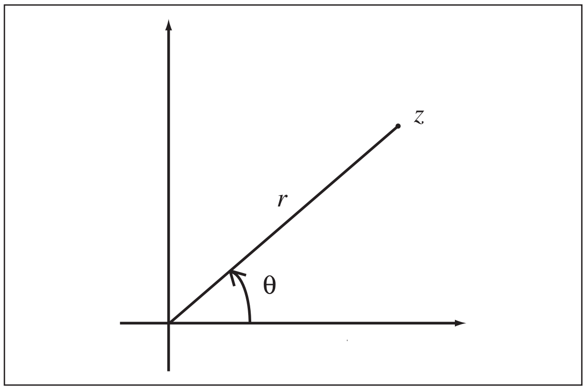


Fig. 7.3

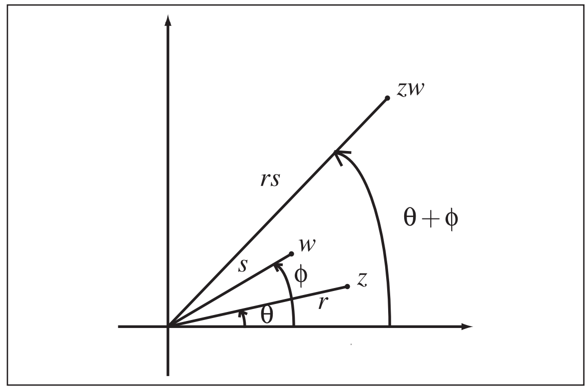


Fig. 7.4

Però, a més, qualsevol nombre complex $z = a + bi$ amb $|z| = 1$ es pot escriure com a

$$z = (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

per tant, qualsevol nombre complex $z \neq 0$ es pot escriure com a

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

amb $r > 0$. Aquesta expressió s'anomena **forma trigonomètrica** d'un nombre complex. El nombre r és únic (és $|z|$) però θ no és únic; si una possibilitat és θ_0, que s'anomena argument i s'escriu $arg(z)$, aleshores les altres són $\theta_0 + 2k\pi$ essent $k \in \mathbb{Z}$.

Amb el mòdul i l'argument es defineix una altra forma de representar els nombres complexos, la **forma polar**. Veure la figura 7.3.

$$z = r_\theta$$

La forma trigonomètrica dels nombres complexos ens ajuda a donar la interpretació geomètrica del producte.

Si z i w són dos nombres complexos diferents de zero tals que

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ w &= s(\cos\phi + i\sin\phi) \end{aligned}$$

aleshores,

$$\begin{aligned} z \cdot w &= rs(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) \\ &= rs[(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)] \\ &= rs\,[\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)] \end{aligned}$$

Per tant, el nombre complex $z \cdot w$ és un nombre de mòdul, el producte dels mòduls de z i de w i d'argument, la suma dels arguments de z i w. Veure la figura 7.4.

Propietat 7.2.1 (*Propietats de l'argument*) *Si z i w són dos nombres complexos, aleshores es compleix:*

1. $arg(zw) = arg(z) + arg(w)$
2. *Si* $z \neq 0$, $arg(z^{-1}) = -arg(z)$
3. *Si* $w \neq 0$, $arg(\frac{z}{w}) = arg(z) - arg(w)$

per tant, si $z = r_\theta$ i $w = s_\phi$ podem escriure

$$z \cdot w = (|z| \cdot |w|)_{\theta+\phi}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r_\theta}{s_\phi} = \left(\left|\frac{z}{w}\right|\right)_{\theta-\phi}$$

essent θ i ϕ angles de l'interval $[0, 2\pi)$

7.3 Potències i arrels

Per al càlcul de potències i arrels de nombres complexos convé tenir l'expressió del nombre en forma trigonomètrica o polar, per tant és interessant donat un nombre complex saber passar de la forma binòmica o cartesiana a la forma polar o trigonomètrica i viceversa.

Donada la forma trigonomètrica és senzill trobar-ne la forma binòmica o cartesiana

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cos\theta + ir\sin\theta = a + bi = (a, b)$$

essent

$$\begin{aligned} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{aligned}$$

Suposem ara que tenim un nombre complex en forma binòmica. Busquem el seu mòdul i en calculem l'argument.

$$z = a + bi = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

per tant,

$$\begin{aligned} a &= |z|\cos\theta \\ b &= |z|\sin\theta \end{aligned}$$

$$\text{Si} \quad a = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{si } \; b > 0 \quad \text{i} \quad \theta = \frac{3\pi}{2} \quad \text{si } \; b < 0$$

$$\text{Si} \quad a \neq 0 \quad \frac{b}{a} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \arctan\frac{b}{a}$$

Observació: Fixem-nos que hi ha dos angles a $[0, 2\pi)$ tals que tenen el mateix valor de la tangent. Per trobar el valor correcte de θ hem de tenir en compte els signes de a i de b. Si a i b tenen el mateix signe, la tangent és positiva i l'angle θ es troba bé al primer quadrant (si $a > 0$ i $b > 0$), bé al tercer (si $a < 0$ i $b < 0$).

Si a i b tenen signes diferents, la tangent és negativa i l'angle θ es troba al segon quadrant ($a < 0$ i $b > 0$) o al quart ($a > 0$ i $b < 0$).

Exemple 7.3.1 *Expresseu en forma polar el nombre complex $z = 1 - i\sqrt{3}$*

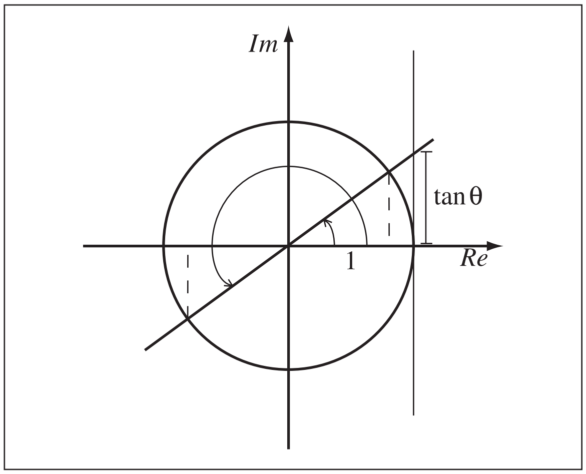


Fig. 7.5

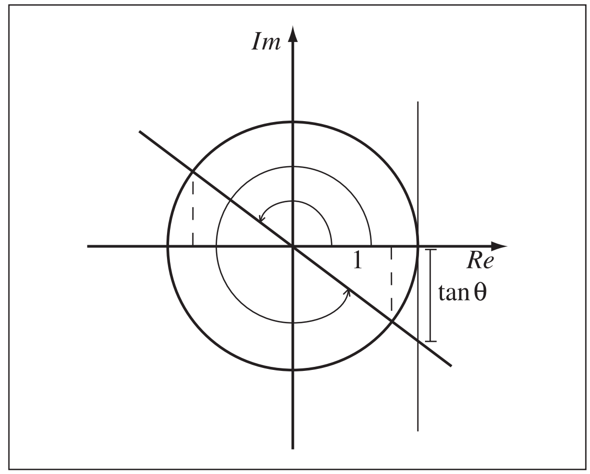


Fig. 7.6

Hem de calcular el mòdul i l'argument.

$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \arctan \frac{-\sqrt{3}}{1} = \arctan(-\sqrt{3})$$

Com que $a = 1 > 0$ i $b = -\sqrt{3} < 0$

$$\theta = \frac{5\pi}{3}$$

i, per tant,

$$z = 2_{\frac{5\pi}{3}}$$

Definició 7.3.1 (*Exponencial complexa*) *Si $x \in \mathbb{R}$, es defineix*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Observació: Donat un nombre complex z, es pot expressar en forma trigonomètrica com a

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

per tant, amb la definició d'exponencial complexa

$$z = |z|e^{i\theta}$$

aquesta s'anomena **forma exponencial** d'un nombre complex.

Propietat 7.3.1 (*Fórmula de De Moivre*) *Si z és un nombre complex, $z \neq 0$*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

aleshores, si $n \in \mathbb{N}$, es demostra per inducció que

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

expressió que es coneix com a fórmula de De Moivre.

Exemple 7.3.2 *Expresseu en forma binòmica la suma:*

$$S = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{28}}$$

Es tracta de sumar els 28 primers termes d'una progressió geomètrica i aplicar la fórmula de De Moivre. Recordeu que per calcular potències de nombres complexos el millor és tenir l'expressió trigonomètrica o polar del nombre complex.

Aquesta suma correspon a la suma dels 28 primers termes de la progressió geomètrica de raó $\frac{1}{1+i}$. Utilitzarem la fórmula

$$S_n = \frac{a_0 - a_n r}{1 - r}$$

essent $a_0 = 1$, $a_n = \frac{1}{(1+i)^{28}}$ i $r = \frac{1}{1+i}$

Calculem el mòdul i l'argument del nombre $1+i$.

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\ ; \ \ \theta = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

Per tant, aplicant la fórmula de De Moivre:

$$(1+i)^{28} = (\sqrt{2})^{28}{}_{28\frac{\pi}{4}}$$

Calculem, doncs, l'expressió binòmica de la suma.

$$\begin{aligned}
S_{28} &= \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^{28}}\frac{1}{1+i}}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^{29}}}{\frac{i}{1+i}} = \frac{(1+i) - \frac{1}{(1+i)^{28}}}{i} = \\
&= \frac{(1+i) - \left(\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}\right)^{-28}}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i(1+i) + i(\sqrt{2}^{-28})_{-7\pi}}{1} = \\
&= (1-i) + i\sqrt{2}^{-28}(\cos(-7\pi) + \sin(-7\pi)i) = (1-i) + i(\sqrt{2})^{-28}(-1) = \\
&= 1 - ((\sqrt{2})^{-28} + 1)i
\end{aligned}$$

Definició 7.3.2 (*Arrel n-èsima d'un nombre complex*) *Si $z \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$, es diu que el nombre complex u és una* **arrel n-èsima** *de z si es compleix $z = u^n$*

Propietat 7.3.2 (*Càlcul d'arrels n-èsimes complexes*) *Tot nombre complex no nul té exactament n arrels n-èsimes complexes, que es calculen de la manera següent:*

Si $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, aleshores, els $u_k \in \mathbb{C}$ tals que $u_k^n = z$ són

$$u_k = (|z|)^{\frac{1}{n}}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$$

amb

$$\theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Observem que aquests nombres complexos són tots diferents, ja que dos arguments θ_k qualssevol amb $k = 0, 1, \ldots, n-1$ difereixen en menys de 2π.

Exemple 7.3.3 *Resoleu l'equació $(2+i)z^4 - (6-2i) = 0$ al cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos.*

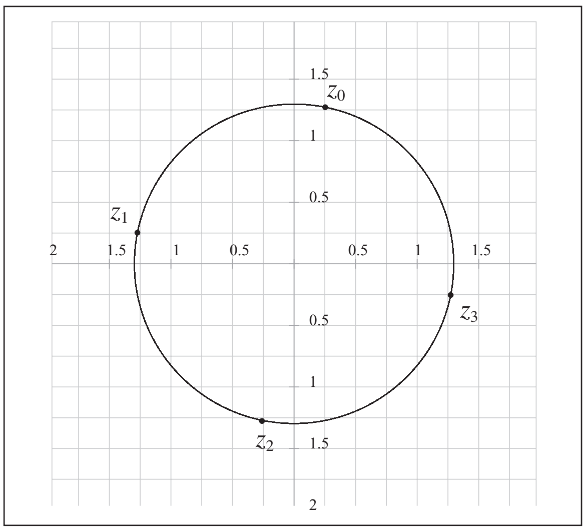


Fig. 7.7

Aquest problema es pot reduir al càlcul de les arrels quartes d'un nombre complex. En efecte, de l'equació donada es dedueix que

$$z = \sqrt[4]{\frac{6-2i}{2+i}} = \sqrt[4]{\frac{(6-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}} = \sqrt[4]{2-2i}$$

Primer de tot buscarem la forma trigonomètrica del nombre $2-2i$

$$2-2i = \sqrt{8}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$$

Per tant, les quatre arrels que estem buscant son els nombres complexos de mòdul

$$\sqrt[4]{\sqrt{8}} = \sqrt[8]{8}$$

i arguments:

$$\varphi_0 = \frac{\frac{7\pi}{4} + 0\cdot(2\pi)}{4} = \frac{7\pi}{16} \qquad \varphi_1 = \frac{\frac{7\pi}{4} + 1\cdot(2\pi)}{4} = \frac{15\pi}{16}$$

$$\varphi_2 = \frac{\frac{7\pi}{4} + 2\cdot(2\pi)}{4} = \frac{23\pi}{16} \qquad \varphi_3 = \frac{\frac{7\pi}{4} + 3\cdot(2\pi)}{4} = \frac{31\pi}{16}$$

Aquests quatre punts del pla que anomenem z_0, z_1, z_2 i z_3 estan sobre una mateixa circumferència centrada a l'origen de coordenades i de radi $\sqrt[8]{8}$, tal com s'observa a la figura 7.7.

Observem que hi ha polinomis a coeficients reals que no tenen solució, per exemple $x^2+1=0$. El nombre i es va introduir per tal de tenir una solució d'aquesta equació. El teorema fonamental de l'àlgebra estableix el fet que la introducció del nombre i proporciona solucions a qualsevol equació polinòmica a coeficients complexos.

Teorema 7.3.1 (*Teorema fonamental de l'àlgebra*) *Qualsevol equació*

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \quad a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$$

té almenys una arrel complexa.

Exemple 7.3.4 *Considerem l'equació al cos* $\mathbb{C}$ *dels nombres complexos:*

$$z^3 + (-1-2i)z^2 + (-1+9i)z - 2(1+5i) = 0$$

a) Demostreu que té una solució real i calculeu-la.
b) Busqueu les altres solucions de l'equació.
c) Demostreu que el triangle que determinen les tres solucions de l'equació és isòsceles.

Es tracta de resoldre una equació de tercer grau en el cos dels nombres complexos. Recordeu que si un polinomi a coeficients reals té una arrel complexa també és arrel la seva conjugada. En aquest cas això no passa perquè el polinomi té coeficients complexos.

a) Suposem $z = r$ amb r real. Tindrem:

$$r^3 + (-1-2i)r^2 + (-1+9i)r - 2(1+5i) = 0$$

que separant la part real i la part imaginària serà:

$$(r^3 - r^2 - r - 2) + (-2r^2 + 9r - 10)i = 0$$

Per tant, r haurà de complir les equacions:

$$r^3 - r^2 - r - 2 = 0 \quad i \quad -2r^2 + 9r - 10 = 0$$

Solucionant la segona equació tenim que $r = 2$ o bé $r = 2,5$. Però $r = 2,5$ no compleix la primera equació, per tant, la solució real de l'equació és

$$r = 2$$

b) Dividim el polinomi per $z - 2$. L'equació que hem de resoldre es transforma en:

$$(z-2)(z^2 + (1-2i)z + (1+5i)) = 0$$

és a dir, $z^2 + (1-2i)z + (1+5i) = 0$ que és una equació de segon grau.

$$z = \frac{-(1-2i) \pm \sqrt{(1-2i)^2 - 4(1+5i)}}{2} = \frac{-(1-2i) \pm \sqrt{-7-24i}}{2} =$$
$$= \frac{-(1-2i) \pm (-3+4i)}{2} = \begin{cases} -2+3i \\ 1-i \end{cases}$$

(hem calculat $\sqrt{-7-24i}$ resolent el sistema resultant de plantejar l'equació $(a+bi)^2 = -7-24i$, però també es pot calcular passant el nombre $-7-24i$ a forma trigonomètrica i calculant-ne l'arrel.) Així, doncs, les tres solucions de l'equació són: $z_1 = 2$, $z_2 = -2+3i$ i $z_3 = 1-i$.

c) Comprovem que la distància de z_2 a z_1 és la mateixa que la de z_2 a z_3 tenint en compte que la distància es defineix com a $d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|$.

$$d(z_2,z_1) = |z_2 - z_1| = |(-2+3i)-2| = |-4+3i| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = 5$$
$$d(z_2,z_3) = |z_2 - z_3| = |(-2+3i)-(1-i)| = |-3+4i| =$$
$$= \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$$

A l'exemple que exposem a continuació s'ha de treballar amb desigualtats, per tant és important recordar que:

si $a < b$, aleshores
$$\begin{array}{ll} a+c < b+c & \forall c \in \mathbb{R} \\ a-c < b-c & \forall c \in \mathbb{R} \\ ac < bc & \forall c \in \mathbb{R}^+ \\ ac > bc & \text{per a qualsevol nombre negatiu } c \in \mathbb{R} \end{array}$$

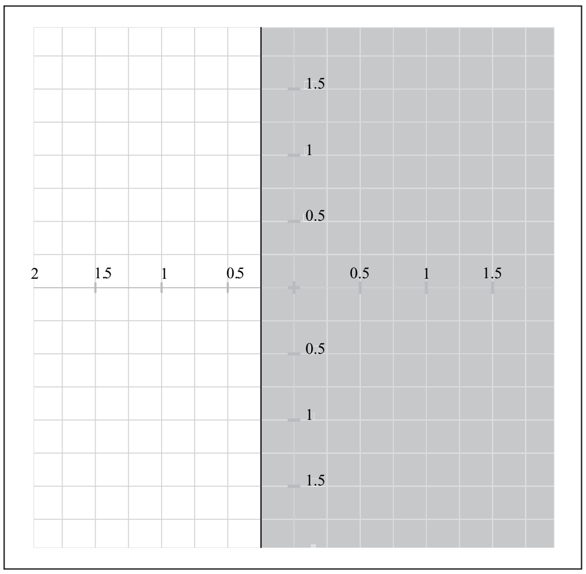


Fig. 7.8

Exemple 7.3.5 *Representeu el conjunt de tots els nombres complexos $z \in \mathbb{C}$ que satisfan cadascuna de les condicions següents:*

a) $|2z| \leq |2z+1|$;

b) $Re\left(\frac{2}{z}\right) + Im\left(\frac{4}{\bar{z}}\right) < 1$;

c) $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) \leq Im(z),\ |z|^2 \leq 1\}$.

Es tracta de buscar aquests llocs geomètrics tenint en compte la definició de mòdul, part real i part imaginària d'un nombre complex.

Per poder representar gràficament aquests conjunts, convé recordar com es pot obtenir l'expressió general d'una circumferència de centre i radi determinats.

a) Si $z = x + yi$, es compleix que

$$|2z| \leq |2z+1| \Leftrightarrow |2(x+yi)| \leq |2(x+yi)+1| \Leftrightarrow$$
$$|2x+2yi| \leq |(2x+1)+2yi| \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(2x)^2+(2y)^2} \leq \sqrt{(2x+1)^2+(2y)^2} \Leftrightarrow$$
$$4x^2+4y^2 \leq 4x^2+4x+1+4y^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{-1}{4} \leq x$$

que representa el semiplà corresponent a la part dreta de la recta vertical $x = -\frac{1}{4}$, com observem a la figura 7.8.

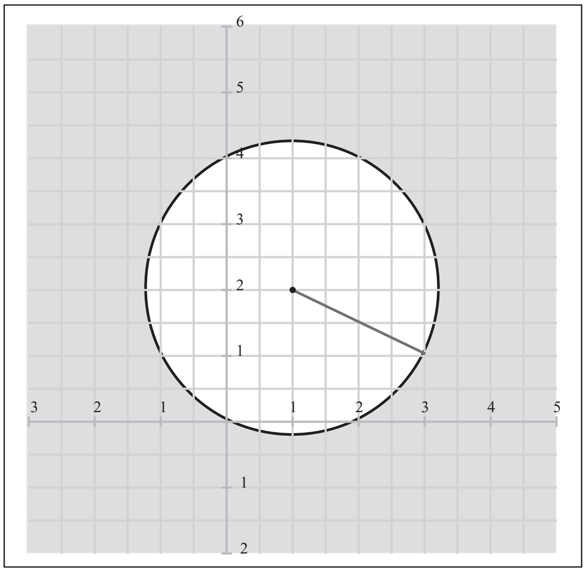


Fig. 7.9

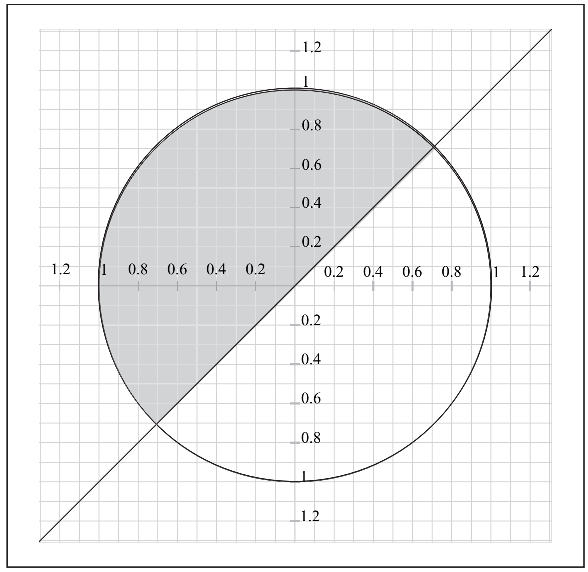


Fig. 7.10

b) Si $z = x + yi$, es compleix que

$$Re\left(\frac{2}{z}\right) + Im\left(\frac{4}{\overline{z}}\right) < 1 \Leftrightarrow$$

$$Re\left(\frac{2}{x+yi}\right) + Im\left(\frac{4}{\overline{x+yi}}\right) < 1 \Leftrightarrow$$

$$Re\left(\frac{2(x-yi)}{x^2+y^2}\right) + Im\left(\frac{4(x+yi)}{x^2+y^2}\right) < 1 \Leftrightarrow$$

$$Re\left(\frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}i\right) + Im\left(\frac{4x}{x^2+y^2} + \frac{4y}{x^2+y^2}i\right) < 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4y}{x^2+y^2} < 1 \Leftrightarrow 2x + 4y < x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 1 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 > 5 = (\sqrt{5})^2$$

que representa l'exterior del cercle de centre (1,2) i radi $\sqrt{5}$, com veiem a la figura 7.9.

c) Si $z = x + yi$, es compleix que

$$Re(z) \leq Im(z) \Leftrightarrow x \leq y$$

$$|z|^2 \leq 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+y^2})^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

El conjunt que busquem són els punts que pertanyen a la intersecció del semiplà $x \leq y$ amb el cercle de centre $(0,0)$ i radi $r = 1$, com s'observa a la figura 7.10.

Per consolidar els nombres complexos fent més exercicis, podeu treballar amb la pàgina
`http://www.wiris.net/upc.edu/collection`

8 Polinomis reals

En aquest capítol estudiarem els polinomis definits a nivell de matemàtiques elementals i ens interessa recordar-ne les operacions algebraiques i l'estudi de les arrels i factorització dels polinomis. En un curs més elevat d'àlgebra, es defineixen els polinomis com una successió de nombres i de manera totalment coherent amb el que ara estudiarem.

8.1 Definicions i exemples

Definició 8.1.1 (*Polinomi*) *Definim un* **polinomi real** *com a*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

essent $a_0, a_1, \cdots, a_n$ nombres reals que s'anomenen coeficients i x una variable indeterminada. Aquesta forma s'anomena expressió canònica del polinomi.

1. Si $a_n \neq 0$ direm que aquest polinomi té **grau** n.
2. Anomenem $\mathbb{R}[x]$ el conjunt dels polinomis reals, és a dir, dels polinomis amb coeficients reals.
3. Direm que dos polinomis són iguals si tenen iguals els seus coeficients respectius. Per tant, donats dos polinomis $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ i $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, direm que

$$(p(x) = q(x)) \Longleftrightarrow (n = m \;\; i \;\; a_i = b_i \;\; \forall i = 0, 1, \cdots, n)$$

Definició 8.1.2 (*Funció polinòmica*) *A tot polinomi real $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ se li pot associar una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

anomenada funció polinòmica associada al polinomi.

Exemple 8.1.1 (*Exemples de funcions polinòmiques*)

1. *Funció constant:* $f(x) = a$
2. *Funció afí:* $f(x) = ax + b, \;\; a \neq 0$
3. *Funció quadràtica:* $f(x) = ax^2 + bx + c, \;\; a \neq 0$
4. *Funció cúbica:* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \;\; a \neq 0$

8.2 Àlgebra de polinomis

Si $p(x)$ i $q(x)$ són dos polinomis reals

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad i \quad q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

definim

1. *suma*

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_r + b_r)x^r$$

$$\text{essent } r = m\grave{a}x\{m, n\}$$

2. *producte per escalar*

$$\lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \cdots + \lambda a_n x^n \quad (\text{essent } \lambda \in \mathbb{R})$$

3. *producte*

$$p(x)q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n+m} x^{n+m}$$

$$\text{on } c_h = \sum_{i+j=h} a_i b_j \quad \begin{array}{l} (0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq m) \\ \forall h = 0, 1, \cdots, n+m \end{array}$$

Exemple 8.2.1 *Si $p(x) = 2x^3 + 5x - 7$ i $q(x) = x^2 - 2x + 1$ calculeu $p(x) + q(x)$ i $p(x)q(x)$.*

Per sumar i multiplicar polinomis s'acostumen a escriure tal com ho farem en aquest exemple. Aquesta metodologia permet simplificar molt el càlcul d'aquestes dues operacions.

suma

$$\begin{array}{cccc} 2x^3 & & +5x & -7 \\ & x^2 & -2x & +1 \\ \hline 2x^3 & +x^2 & +3x & -6 \end{array}$$

D'aquesta manera obtenim $p(x) + q(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 6$.

producte

$$\begin{array}{cccccc} & & 2x^3 & & +5x & -7 \\ & & & x^2 & -2x & +1 \\ \cline{3-6} & & 2x^3 & & +5x & -7 \\ & -4x^4 & & -10x^2 & +14x & \\ 2x^5 & & +5x^3 & -7x^2 & & \\ \hline 2x^5 & -4x^4 & +7x^3 & -17x^2 & +19x & -7 \end{array}$$

D'aquesta manera obtenim $p(x)q(x) = 2x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 17x^2 + 19x - 7$.

Exemple 8.2.2 *Donats els polinomis* $p(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x + \frac{1}{4}$, $q(x) = 3x^2 - 2x^3 + \frac{1}{3}x + 4$ *i* $r(x) = 5x^2 + \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{2}$, *calculeu* $p(x) + q(x) + r(x)$.

$$\begin{array}{rrrr} 1/2x^3 & & -4x & +1/4 \\ -2x^3 & 3x^2 & +1/3x & +4 \\ 3/4x^3 & +5x^2 & -1/5x & +3/2 \\ \hline -3/4x^3 & +8x^2 & -58/15x & +23/4 \end{array}$$

Exemple 8.2.3 *Quins valors han de tenir a, b i c per tal que la suma dels polinomis* $p(x) = 3x^2 - bx - c$, $q(x) = ax^2 + 4x - 5$ *i* $r(x) = 2x^2 - 6x - 4$ *sigui nul·la.*

$$p(x) + q(x) + r(x) = (5+a)x^2 - (2+b)x - (9+c) = 0$$

Igualant els coeficients s'ha de complir

$$\left.\begin{array}{r} 5+a=0 \\ 2+b=0 \\ 9+c=0 \end{array}\right\} \quad \text{per tant} \quad \left\{\begin{array}{l} a=-5 \\ b=-2 \\ c=-9 \end{array}\right.$$

Exemple 8.2.4 *Donats els polinomis* $p(x) = -12x^4 + 5x^2 - 3x + 8$, $q(x) = 6x^3 + 8x^2 - 19$, $r(x) = 14x^4 - 7x^3 + 5x + 9$ *i* $s(x) = -x^4 + 7x^2 - 3x + 6$. *De la suma dels dos primers, resteu la diferència dels altres dos i comproveu que:*

$$(p(x) + q(x)) - (r(x) - s(x)) = -27x^4 + 13x^3 + 20x^2 - 11x - 14$$

```
p=-12·x^4+5·x^2-3·x+8  ⟹  -12·x^4+5·x^2-3·x+8
q=6·x^3+8·x^2-19  ⟹  6·x^3+8·x^2-19
r=14x^4-7·x^3+5·x+9  ⟹  14·x^4-7·x^3+5·x+9
s=-x^4+7·x^2-3·x+6  ⟹  -x^4+7·x^2-3·x+6
(p+q)-(r-s)  ⟹  -27·x^4+13·x^3+20·x^2-11·x-14
```

Primer de tot calculem els polinomis

$$p(x) + q(x) \quad \text{i} \quad r(x) - s(x)$$
$$p(x) + q(x) = -12x^4 + 6x^3 + 13x^2 - 3x - 11$$
$$r(x) - s(x) = 15x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 8x + 3$$

i ara fem la diferència

$$(p(x) + q(x)) - (r(x) - s(x)) = -27x^4 + 13x^3 + 20x^2 - 11x - 14$$

Il·lustrem aquests càlculs amb WIRIS

Exemple 8.2.5 *Calculeu l'expressió canònica del polinomi*

$$p(x) = 3(x^2-1)(x+2) - 5(\frac{1}{3}x + \frac{5}{2})(0,2x^2 + x - \frac{1}{5})$$

$$\begin{array}{rrrrr} & & 3x^2 & & -3 \\ & & & x & +2 \\ \cline{3-5} & & 6x^2 & & -6 \\ & 3x^3 & & -3x & \\ \cline{2-5} 3(x^2-1)(x+2) = & 3x^3 & +6x^2 & -3x & -6 \end{array}$$

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 2/10x^2 & +x & -1/5 \\
 & & & 5/3x & +25/2 \\
\cline{3-5}
 & & 50/20x^2 & +25/2x & -25/10 \\
 & 10/30x^3 & +5/3x^2 & -5/15x & \\
\cline{2-5}
5(1/3x+5/2)(0,2x^2+x-1/5) = & 1/3x^3 & +25/6x^2 & +73/6x & -5/2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr}
3x^3 & +6x^2 & -3x & -6 \\
-1/3x^3 & -25/6x^2 & -73/6x & +5/2 \\
\hline
8/3x^3 & +11/6x^2 & -91/6x & -7/2
\end{array}
$$

Per tant,

$$3(x^2-1)(x+2)-5(\frac{1}{3}x+\frac{5}{2})(0,2x^2+x-\frac{1}{5}) = \frac{8}{3}x^3+\frac{11}{6}x^2-\frac{91}{6}x-\frac{7}{2}$$

Propietat 8.2.1 *Si anomenem $gr[p(x)]$ el grau d'un polinomi p(x), es compleix que*

$$gr[p(x)+q(x)] \leq \text{màx}\{gr[p(x)], gr[q(x)]\}$$

$$gr[p(x)q(x)] = gr[p(x)]+gr[q(x)]$$

Propietat 8.2.2 *A $\mathbb{R}[x]$ es compleix que si $p(x)$ i $q(x)$ són dos polinomis reals, aleshores*

1. $p(x)q(x) = 0 \Rightarrow \ (p(x)=0 \ \textit{ o bé } \ q(x)=0)$
2. *Un polinomi $p(x)$ amb $gr[p(x)]>1$ no té invers, és a dir, la relació $p(x)q(x)=1$ només es compleix si $p(x)$ i $q(x)$ són constants (constants inverses).*

8.3 Divisió de polinomis

Si $p(x)$ i $q(x) \neq 0$ són dos polinomis reals, dividir $p(x)$ entre $q(x)$ vol dir trobar dos polinomis $c(x)$ i $r(x)$, que anomenarem **quocient** i **residu** de la divisió, tals que:

1. $p(x) = q(x)c(x)+r(x)$
2. $gr[r(x)] < gr[q(x)]$ o bé $r(x)=0$

Si $r(x)=0$ direm que la divisió és **exacta** i direm que $p(x)$ és **múltiple** de (o **divisible** per) $q(x)$ i que $q(x)$ és **divisor** de (o que **divideix**) $p(x)$.

8.3.1 Algorisme de la divisió

Suposem que $n \geq m$

$$
\begin{array}{ll}
p(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n & \text{(dividend)} \\
q(x) = b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m & \text{(divisor)} \\
c(x) = c_0+c_1x+\cdots+c_{n-m}x^{n-m} & \text{(quocient)} \\
r(x) = r_0+r_1x+\cdots+r_{m-1}x^{m-1} & \text{(residu)}
\end{array}
$$

Donats $p(x)$ i $q(x)$ per obtenir $c(x)$ i $r(x)$ es fa servir el següent algorisme:

$$\begin{array}{llll|l}
a_n x^n + \cdots & & & \cdots + a_0 & b_m x^m + \cdots + b_0 \\ \cline{5-5}
\quad \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots & & & \cdots + \alpha_0 & c_{n-m}x^{n-m} + \cdots + c_0 \\
\quad\quad \beta_{n-2}x^{n-2} + \cdots & & & \cdots + \beta_0 & \\
& \cdots & & & \\
& \gamma_m x^m + \cdots & & \cdots + \gamma_0 & \\
& & r_{m-1}x^{m-1} + & \cdots + r_0 &
\end{array}$$

essent

$$\begin{cases} p_1(x) = \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_0 \\ p_2(x) = \beta_{n-2}x^{n-2} + \cdots + \beta_0 \\ \cdots \\ p_{n-m}(x) = \gamma_m x^m + \cdots + \gamma_0 \\ r(x) = r_{m-1}x^{m-1} + \cdots + r_0 \\ c(x) = c_{n-m}x^{n-m} + \cdots + c_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{n-m} = \frac{a_n}{b_m} \\ c_{n-m-1} = \frac{\alpha_{n-1}}{b_m} \\ c_{n-m-2} = \frac{\beta_{n-2}}{b_m} \\ \cdots \\ c_0 = \frac{\gamma_m}{b_m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1(x) = p(x) - q(x)c_{n-m}x^{n-m} \\ p_2(x) = p_1(x) - q(x)c_{n-m-1}x^{n-m-1} \\ p_3(x) = p_2(x) - q(x)c_{n-m-2}x^{n-m-2} \\ \cdots \\ r(x) = p_{n-m}(x) - q(x)c_0 \end{cases}$$

Fixem-nos que fins ara hem escrit els polinomis en forma canònica en potències creixents o bé decreixents de manera indiferent. Per utilitzar l'algorisme de la divisió que acabem d'exposar, els polinomis sempre han d'estar escrits amb la forma canònica i en potències decreixents.

Exemple 8.3.1 *Donats els polinomis* $p(x) = 4x^4 - x^2 + 2x + 1$ *i* $q(x) = x^2 - 3x + 5$ *trobeu el quocient i el residu de la divisió entre* $p(x)$ *i* $q(x)$.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & & -x^2 & +2x & +1 & x^2 - 3x + 5 \\ \cline{6-6}
-(+4x^4 & -12x^3 & +20x^2) & & & 4x^2 + 12x + 15 \\ \cline{1-3}
& 12x^3 & -21x^2 & +2x & & \\
& -(+12x^3 & -36x^2 & +60x) & & \\ \cline{2-4}
& & 15x^2 & -58x & +1 & \\
& & -(+15x^2 & -45x & +75) & \\ \cline{3-5}
& & & -13x & -74 &
\end{array}$$

Per tant, $c(x) = 4x^2 + 12x + 15$ i $r(x) = -13x - 74$.

Aquesta divisió de polinomis es pot escriure com a

$$\frac{4x^4 - x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 5} = 4x^2 + 12x + 15 + \frac{-13x - 74}{x^2 - 3x + 5}$$

Exemple 8.3.2 *Donats els polinomis* $p(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 7$ *i* $q(x) = 3x^2 + 5$ *trobeu el quocient i el residu de la divisió entre* $p(x)$ *i* $q(x)$*.*

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +x^2 & -3x & +7 & 3x^2+5 \\ \cline{5-5}
-(+2x^3 & & +10/3x) & & 2/3x+1/3 \\ \cline{1-3}
 & x^2 & -19/3x & +7 & \\
 & -(+x^2 & & +5/3) & \\ \cline{2-4}
 & & -19/3x & +16/3 &
\end{array}$$

Per tant, $c(x) = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$ i $r(x) = -\dfrac{19}{3}x + \dfrac{16}{3}$.

Aquests càlculs es poden fer amb WIRIS i obtenim el mateix resultat.

$$\begin{array}{l}
p=2\cdot x^3+x^2-3\cdot x+7 \Rightarrow 2\cdot x^3+x^2-3\cdot x+7 \\
q=3\cdot x^2+5 \Rightarrow 3\cdot x^2+5 \\
\text{divisio_entera}(p,q) \Rightarrow \left\{\frac{2}{3}\cdot x+\frac{1}{3}, -\frac{19}{3}\cdot x+\frac{16}{3}\right\}
\end{array}$$

Exemple 8.3.3 *Calculeu* $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ *essent*

$$p(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{19}{6}x^3 + 11x^2 + \frac{7}{2}x + 45 \quad i \quad q(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 8x - 9.$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1/6x^4 & -19/6x^3 & +11x^2 & +15/2x & +45 & 1/3x^3-3x^2-8x-9 \\ \cline{6-6}
-(+1/6x^4 & -3/2x^3 & -4x^2 & -9/2x) & & 1/2x-10/2 \\ \cline{1-5}
 & -10/6x^3 & +15x^2 & +12x & +45 & \\
 & -(-10/6x^3 & +15x^2 & +40x & +45) & \\ \cline{2-5}
 & & & -28x & &
\end{array}$$

Per tant,

$$p(x) = c(x)q(x) + r(x)$$

essent

$$c(x) = \frac{1}{2}x - 5 \;\; i \;\; r(x) = -28x$$

8.3.2 Regla de Ruffini

Un cas particular de divisió de polinomis és quan dividim per un polinomi de primer grau, per exemple, si $q(x) = x - \alpha$.

$$\begin{array}{r|l} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots \quad + a_0 & x - \alpha \\ \hline r_0 & c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_0 = c(x) \end{array}$$

amb

$$c_{n-1} = a_n, \; c_i = a_{i-1} + \alpha c_{i-1} \; (i = n-2, n-3, \cdots, 0), \; r_0 = r(x) = a_0 + \alpha c_0$$

Per calcular aquests coeficients, podem escriure-ho de la forma següent, que s'anomena **regla de Ruffini**.

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \alpha & & \alpha c_{n-1} & \alpha c_{n-2} & \cdots & \alpha c_1 & \alpha c_0 \\ \hline & c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_0 & \boxed{r_0} \end{array}$$

Exemple 8.3.4 *Calculeu el quocient i el residu de dividir* $p(x) = 3x^4 - x^2 + 2x - 1$ *entre* $q(x) = x - 2$.

Aplicant la regla de Ruffini

$$\begin{array}{c|ccccc} & 3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & & 6 & 12 & 22 & 48 \\ \hline & 3 & 6 & 11 & 24 & \boxed{47} \end{array}$$

Deduïm que $c(x) = 3x^3 + 6x^2 + 11x + 24$ i $r(x) = 47$.

8.4 Màxim comú divisor i mínim comú múltiple

Definició 8.4.1 (*Màxim comú divisor*) *Donats dos polinomis reals $p(x)$ i $q(x)$ no nuls, direm que $d(x)$ és el* **màxim comú divisor** *de $p(x)$ i $q(x)$ si és el polinomi de major grau possible que divideix $p(x)$ i $q(x)$.*

Farem servir la notació $d(x) = mcd[p(x), q(x)]$

Direm que $p(x)$ i $q(x)$ són primers relatius quan $gr[d(x)] = 0$.

Definició 8.4.2 (*Mínim comú múltiple*) *Donats dos polinomis reals $p(x)$ i $q(x)$ no nuls, direm que $m(x)$ és el* **mínim comú múltiple** *de $p(x)$ i $q(x)$ si és el polinomi de menor grau possible que és múltiple de $p(x)$ i de $q(x)$.*

Escriurem $m(x) = mcm[p(x), q(x)]$

8.5 Arrels de polinomis

Definició 8.5.1 (*Arrel*) *Considerem $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ un polinomi real. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, es defineix el valor numèric d'un polinomi com a $p(\lambda)$.*

Direm que r és una **arrel** *de $p(x)$ si $p(r) = a_0 + a_1 r + \cdots + a_n r^n = 0$, és a dir, si $p(x)$ és divisible per $x - r$, que equival a dir*

$$p(x) = (x-r)q(x) \quad \textit{essent } q(x) \textit{ un polinomi real.}$$

Direm que r és una **arrel múltiple** *d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}$ si*

$$p(x) = (x-r)^{\alpha} q(x) \quad i \quad q(r) \neq 0$$

Hem vist que r és arrel de $p(x)$, si $p(x) = 0$, és a dir, si r és solució de l'equació $p(x) = 0$. Per tant, és equivalent trobar les arrels de $p(x)$ a resoldre l'equació $p(x) = 0$. A continuació donarem exemples de resolució d'equacions polinòmiques senzilles.

Equacions lineals:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \quad si\ a \neq 0$$

Equacions quadràtiques:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad si\ a \neq 0$$

Leonardo da Pisa (1180-1250) més conegut com a Fibonacci o "fill de Bonaccio" era un mercader italià que es coneix sobretot per la seva obra *Liber abaci* en què va estudiar l'equació cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ i va donar l'aproximació més precisa d'una arrel irracional d'una equació algebraica a Europa fins al moment, o fins i tot durant almenys els 300 anys següents.

El francès François Viète (1540-1603) va proposar una nova forma de resolució de la cúbica, però va ser Albert Girard (1590-1633) qui va donar la formulació clara i precisa de les relacions entre arrels i coeficients al 1629 en la seva obra *Invention nouvelle en l'algèbre*.

La relació entre la solució d'una equació de tercer grau i els coeficients no és immediata. Per resoldre aquest tipus d'equacions utilitzarem el mètode de Ruffini o bé mètodes d'aproximació.

Proposició 8.5.1 *Considerem $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polinomi que té tots els seus coeficients enters ($a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$).*

1. *Si $p(x) = 0$ té alguna solució entera $r \in \mathbb{Z}$, aleshores r ha de ser un divisor del terme independent a_0 de $p(x)$.*
2. *Si $r \in \mathbb{Z}$ és solució de $p(x) = 0$, aleshores*

$$p(1) \textit{ és múltiple de } r - 1$$
$$p(-1) \textit{ és múltiple de } r + 1$$

3. *Si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ és solució de $p(x) = 0$, aleshores*

$$p \textit{ és divisor del terme independent } a_0 \textit{ de } p(x)$$
$$q \textit{ és divisor del coeficient dominant } a_n \textit{ de } p(x)$$

(Observació: Si $a_n = 1$ l'equació $p(x) = 0$ no té solucións racionals no enteres.)

Aquesta propietat és molt útil per temptejar les possibles arrels d'un polinomi a l'aplicar, per exemple, la regla de Ruffini.

Exemple 8.5.1 *Trobeu totes les arrels del polinomi*

$$p(x) = 2x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 6x^2 - 6x + 4$$

sabent que dues de les seves arrels són enteres i una altra és racional.

Sabem per l'apartat 1 de la proposició 8.5.1 que les possibles arrels enteres de $p(x) = 0$ estan entre els divisors de 4, per tant, en aquest cas les possibles arrels enteres són ± 1, ± 2 i ± 4.

$$\begin{array}{c|rrrrrr|r}
 & 2 & -3 & -3 & 6 & -6 & -6 & 4 \\
1 & & 2 & -1 & -4 & 2 & -4 & -10 \\
\hline
 & 2 & -1 & -4 & 2 & -4 & -10 & \boxed{-6}
\end{array}$$

Per tant, $x = 1$ no és arrel.

$$\begin{array}{c|rrrrrr|r}
 & 2 & -3 & -3 & 6 & -6 & -6 & 4 \\
-1 & & -2 & 5 & -2 & -4 & -10 & -4 \\
\hline
 & 2 & -5 & 2 & 4 & -10 & 4 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & -2 & 0 & 8 & -4 & \\
\hline
 & 2 & -1 & 0 & 4 & -2 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Per tant, -1 i 2 són arrels. Busquem ara l'arrel fraccionària. Per l'apartat 3 de la proposició 8.5.1 l'arrel pot ser $r = \frac{p}{q}$ essent p divisor de -2 i q divisor de 2, per tant les possibles arrels fraccionàries són $\pm\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c|rrrr|r}
 & 2 & -1 & 0 & 4 & -2 \\
1/2 & & 1 & 0 & 0 & 2 \\
\hline
 & 2 & 0 & 0 & 4 & \boxed{0}
\end{array}$$

Per tant, $\frac{1}{2}$ és arrel. Queda per resoldre el polinomi $2x^3 + 4 = 0$, que té solució al cos dels complexos $\mathbb{C}$.

$$2x^3 + 4 = 0 \Rightarrow x^3 + 2 = 0$$

Calculem, doncs, les arrels cúbiques de -2, tal com s'explica al capítol anterior (nombres complexos).

$x = \sqrt[3]{-2}$ té tres solucions a $\mathbb{C}$

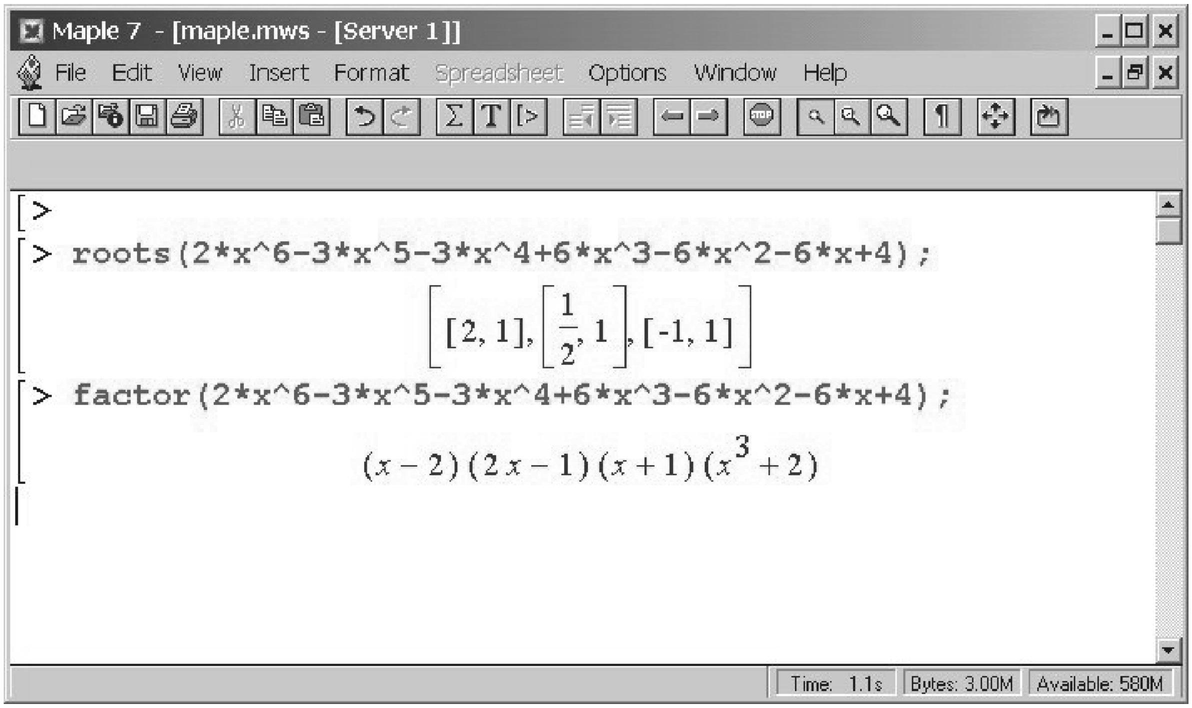
$$x_1 = (\sqrt[3]{2})_{60^\circ} \qquad x_2 = (\sqrt[3]{2})_{180^\circ} \qquad x_3 = (\sqrt[3]{2})_{300^\circ}$$

Per tant, les arrels del polinomi

$$p(x) = 2x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 6x^2 - 6x + 4 = 0$$

són -1, 2, $\frac{1}{2}$, $-\sqrt[3]{2}$, $(\sqrt[3]{2})_{60^\circ}$, $(\sqrt[3]{2})_{300^\circ}$.

En aquest exemple veiem que hi ha polinomis amb coeficients reals que tenen arrels complexes. D'aquest fet en diem que $\mathbb{R}$ **no és algebraicament tancat**.



Amb MAPLE podem obtenir les arrels i factorització a $\mathbb{R}$ amb les següents instruccions i resultats.

8.6 Factorització canònica d'un polinomi

Definició 8.6.1 (*Polinomis complexos*) *Anomenem* $\mathbb{C}[x]$ *el conjunt de* **polinomis complexos***, és a dir, polinomis amb coeficients complexos.*

Teorema 8.6.1 (*Teorema fonamental de l'àlgebra*) *Tot polinomi complex* $p(x)$ *de grau* n *té exactament* n *arrels complexes* [1] *i es pot descomposar en producte de polinomis primers de grau* 1*, és a dir, si les arrels de* $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ *són* $z_1, \cdots, z_k \in \mathbb{C}$ *amb ordres de multiplicitat* $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{N}$ *respectivament, aleshores*

$$p(x) = a_n(x - z_1)^{\alpha_1} \cdots (x - z_k)^{\alpha_k} \qquad (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n)$$

Propietat 8.6.1 *Si* $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$*, és a dir, és un polinomi real que té com a arrel d'ordre* α *el nombre complex* z*, aleshores* $\bar{z}$ *també és arrel d'odre* α *de* $p(x)$*. És a dir, si* $p(x)$ *té per arrel el nombre complex* $z = u + iv$*, aleshores el seu conjugat* $\bar{z} = u - iv$ *també és arrel de* $p(x)$ *i, per tant,* $p(x)$ *és divisible per*

$$(x - z)(x - \bar{z}) = (x - u)^2 + v^2$$

Raoneu com d'aquesta propietat i del teorema fonamental de l'àlgebra es dedueix que a $\mathbb{R}[x]$ els polinomis irreduïbles tenen com a màxim grau 2.

[1] Recordem que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, per tant, les arrels de $p(x)$ poden ser reals.

Propietat 8.6.2 *Si les arrels d'un polinomi real* $p(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$ *són*

$$\left.\begin{array}{l} r_1, \cdots, r_k \ \textit{(reals) amb multiplicitat } \alpha_1, \cdots, \alpha_k \\ u_1 \pm iv_1, \cdots, u_h \pm iv_h \ \textit{(complexes) amb multiplicitat } \beta_1, \cdots, \beta_h \end{array}\right\}$$

aleshores,

$$p(x) = a_n(x - r_1)^{\alpha_1} \cdots (x - r_k)^{\alpha_k} \left[(x - u_1)^2 + v_1^2\right]^{\beta_1} \cdots \left[(x - u_h)^2 + v_h^2\right]^{\beta_n}$$

(observem que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k + 2(\beta_1 + \cdots + \beta_h) = n$*)*

Exemple 8.6.2 *Calculeu el polinomi unitari de quart grau amb coeficients reals sabent que* i *és arrel simple i* 1 *és arrel doble.*

$$\begin{array}{lcl} 1 \text{ arrel doble} & \Rightarrow & \text{factor } (x-1)^2 \\ i \text{ arrel simple} & \Rightarrow & -i \text{ arrel simple} \quad \Rightarrow \quad \text{factor } (x-i)(x+i) \end{array}$$

Per tant, el polinomi és:

$$(x-1)^2(x-i)(x+i) = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 1) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$$

Exemple 8.6.3 *Trobeu les arrels de l'equació*

$$2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6 = 0$$

i doneu la descomposició factorial del polinomi.

Sabem que les arrels enteres del polinomi estan entre els divisors del terme independent de l'equació (en aquest cas, 6), per tant les possibles arrels enteres són ± 1, ± 2, ± 3 i ± 6.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 3 & -12 & -7 & 6 \\ -1 & & -2 & -1 & 13 & -6 \\ \hline & 2 & 1 & -13 & 6 & \boxed{0} \\ 2 & & 4 & 10 & -6 & \\ \hline & 2 & 5 & -3 & \boxed{0} & \\ -3 & & -6 & 3 & & \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Per tant, -1, 2, -3 són arrels i la descomposició factorial és:

$$2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6 = (x+1)(x-2)(x+3)(2x-1)$$

Com que $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

Les arrels de l'equació $2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6 = 0$ són -1, 2, -3 i $\frac{1}{2}$ i podem escriure la descomposició següent:

$$2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6 = 2(x+1)(x-2)(x+3)(x - \frac{1}{2})$$

Amb WIRIS podem obtenir el mateix resultat

$$\text{arrels}(2x^4+3x^3-12x^2-7x+6) \Rightarrow \left\{-3, -1, 2, \frac{1}{2}\right\}$$

$$\text{factoritza}(2x^4+3x^3-12x^2-7x+6) \Rightarrow (x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot(2\cdot x-1)$$

Exemple 8.6.4 *Trobeu les arrels de l'equació*

$$8x^4-36x^3+32x^2+16x-12=0$$

i doneu-ne la descomposició factorial.

Les possibles arrels enteres del polinomi són els divisors de -12, és a dir: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12.

$$\begin{array}{c|rrrr|r}
 & 8 & -36 & 16 & 16 & -12 \\
3 & & 24 & -36 & -12 & 12 \\
\hline
 & 8 & -12 & -4 & 4 & \boxed{0} \\
1/2 & & 4 & 4 & -4 & \\
\hline
 & 8 & -8 & -8 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Si resolem l'equació $8x^2-8x-8=0$ obtenim com a resultat

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1^2+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Podem factoritzar aquesta equació de segon grau

$$8\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Per tant, les arrels de l'equació són 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ i podem escriure la descomposició següent:

$$8(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Per consolidar l'estudi dels polinomis visualitzeu la pàgina
`http://www.wiris.net/upc.edu/collection`

9

Trigonometria. Funcions trigonomètriques

La trigonometria i les funcions trigonomètriques tenen molta importància en gairebé totes les assignatures de les diferents titulacions d'enginyeria, per tant és indispensable el seu bon coneixement.

Els egipcis i babilonis ja coneixien i havien utilitzat propietats relatives a les raons entre els costats de triangles semblants, encara que sense escriure-ho de manera explícita. Es diu que Thales de Milet (ca. 624-548 a. C.) i Pitàgoras de Samos (ca. 580-500 a. C.) van aprendre geometria a Egipte i a Babilònia.

Amb els grecs ens trobem per primera vegada amb un estudi sistemàtic de les relacions entre els angles centrals d'un cercle i les longituds de les cordes corresponents. A les obres d'Euclides (aprox. 300 a. C.) no hi ha trigonometria en el sentit estricte, però sí que hi ha teoremes equivalents a lleis o fórmules trigonomètriques concretes. A la segona meitat del segle II a. C. sembla que es va compondre la primera taula trigonomètrica per part de l'astrònom Hiparc de Nicea (180 a. C., 125 a. C.) i des de l'època d'Hiparc fins a l'edat moderna no hi va haver res semblant a les nostres raons trigonomètriques.

El francès François Viète (1540-1603) està considerat el pare de la visió analítica de la trigonometria. Ell va considerar la trigonometria com una branca independent de la matemàtica i va calcular unes taules de les sis funcions trigonomètriques per a angles de minut a minut, encara que llevat de la funció sinus no va utilitzar els noms actuals de les funcions trigonomètriques.

Fig. 9.1 Definició de la unitat de longitud (el metre)

Entre les aplicacions a la trigonometria podem destacar la resolució de triangles i el seu ús en topografia. Una de les fites més importants en topografia fou la mesura, mitjançant triangulacions, de l'arc meridià que hi ha entre París i Barcelona, i aquesta mesura es va fer servir per donar la primera definició de metre, base del sistema mètric decimal. Si aneu d'excursió per la pista forestal que va d'Ogassa a Camprodon, a la comarca del Ripollès, passareu per aquest meridià i hi trobareu un petit monument que fa referència a la unitat de longitud del metre.

9.1 Mesura d'angles

El primer objectiu d'aquest capítol és familiaritzar-nos amb els diferents sistemes de mesura d'angles: el sexagesimal i el radian. La mesura en radians és la més usada en càlculs científics. Els angles positius són els que es medeixen en sentit contrari al de les agulles d'un rellotge, i els negatius en el sentit de les agulles del rellotge.

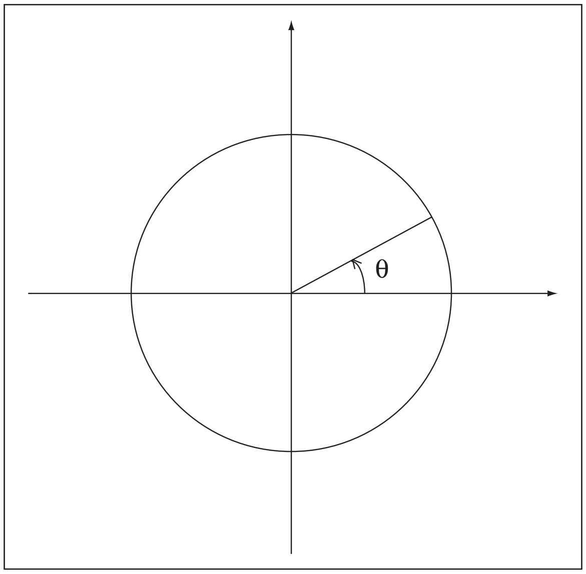


Fig. 9.2 Angle positiu

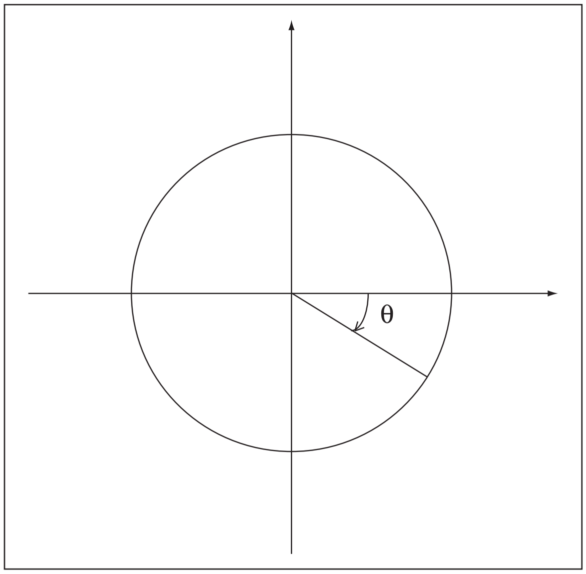


Fig. 9.3 Angle negatiu

Recordem que en una circumferència, un angle de "volta sencera" s'associa a 360 graus, "mitja volta" és 180 graus, i per tant "un quart de volta" és l'angle de 90 graus.

Una altra unitat de mesura d'angles és el radian.

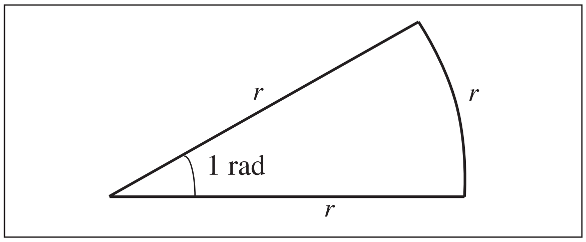


Fig. 9.4 Definició de radian

Definició 9.1.1 *(Radian) Un* radian*, que notarem* rad*, és la mesura d'un angle que determina un arc de circumferència de longitud igual al radi.*

Donat que la longitud d'un cercle de radi r és $2\pi r$, una circumferència de radi 1 té 2π radians.

Per tant, la mesura d'un angle de 360° en radians és 2π.

Propietat 9.1.1 (*Relació entre graus i radians*) *Com* $180^\circ = \pi$,

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\ \textit{rad} \quad (\textit{graus} \Rightarrow \textit{radians})$$

$$1\textit{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \quad (\text{radians} \Rightarrow \textit{graus})$$

Les conversions més usuals són

$$30^\circ = \frac{\pi}{6}\,rad \qquad 90^\circ = \frac{\pi}{2}\,rad$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4}\,rad \qquad 180^\circ = \pi\,rad$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3}\,rad \qquad 360^\circ = 2\pi\,rad$$

A partir d'aquest moment, la mesura dels angles vindrà donada en radians.

9.2 Trigonometria

Les raons trigonomètriques es poden definir com a quocients entre els costats d'un triangle rectangle o bé considerant el cercle unitat. La primera definició es fa servir sobretot a Navegació i Astronomia, on un dels problemes més típics és calcular tres dels sis elements (costats i angles) d'un triangle, coneguts els altres tres. La segona definició és la que es fa servir normalment a Física, Electrònica i en general als estudis d'Enginyeria.

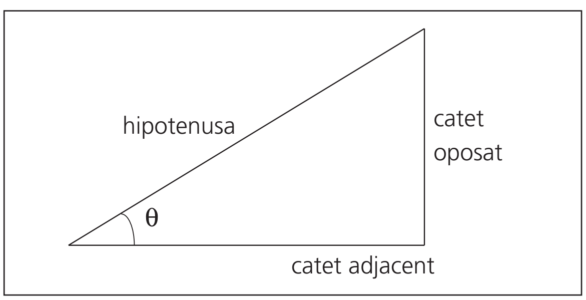


Fig. 9.5

Definició 9.2.1 (*Trigonometria en triangles rectangles*) *Si* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, *es defineix*

$$\sin\theta = \frac{\textit{catet oposat}}{\textit{hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\textit{catet adjacent}}{\textit{hipotenusa}}$$

$$\tan\theta = \frac{\textit{catet oposat}}{\textit{catet adjacent}}$$

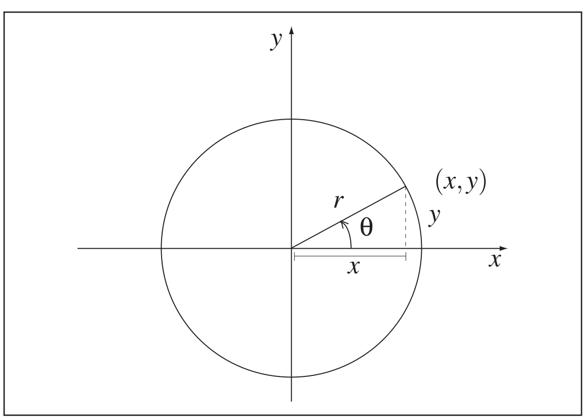


Fig. 9.6

Definició 9.2.2 (*Trigonometria en el cercle unitat*) *Si* θ *és un angle qualsevol, definim*

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \text{cosec }\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Propietat 9.2.1 (*Identitats*)

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \mathit{cot}\ \theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \mathit{sec}\ \theta = \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\mathit{cosec}\ \theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\mathit{cot}\theta}$$

Propietat 9.2.2 (*Identitats pitagòriques*) *Del teorema de Pitàgores es dedueix*

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

i aplicant les definicions de $\tan\theta$, $\sec\theta$ *i* $\cot\theta$ *podem deduir*

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$\cot^2\theta + 1 = \mathrm{cosec}^2\theta$$

Propietat 9.2.3

$\theta \rightarrow$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no definida	0

Propietat 9.2.4 (*Fórmules de reducció*)

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\sin\theta = -\sin(\theta - \pi)$$
$$\cos\theta = -\cos(\theta - \pi)$$
$$\tan\theta = \tan(\theta - \pi)$$
$$\cos\theta = \sin(\theta + \tfrac{\pi}{2})$$

Aquestes fórmules són útils i interessants perquè conegut el valor d'una funció trigonomètrica permeten deduir el valor de les altres.

Propietat 9.2.5 (*Suma i diferència d'angles*)

$$\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$$
$$\sin(\theta - \phi) = \sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi$$
$$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$$
$$\cos(\theta - \phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi$$

Propietat 9.2.6 (*Angle doble i meitat*)

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$
$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

que també podem escriure com a:

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$$
$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)$$
$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)$$

Una de les aplicacions clàssiques de la trigonometria consisteix a resoldre triangles i, per això, cal estudiar quines són les relacions existents entre els sis elements fonamentals del triangle, que són els tres costats a, b, c i els tres angles A, B, C. Sabem que $A+B+C=\pi$ radians, però quina relació hi ha entre els tres costats d'un triangle qualsevol? I entre costats i angles?

Hi ha dues relacions fonamentals per resoldre qualsevol triangle: el teorema del sinus i el del cosinus.

Teorema 9.2.2 (*Teorema del sinus*) *En un triangle qualsevol de costats a, b, c i angles A, B i C (veure figura 9.7) es compleix*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Teorema 9.2.3 (*Teorema del cosinus*) *En un triangle qualsevol de costats a, b, c i angles A, B i C (veure figura 9.7) es compleix*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

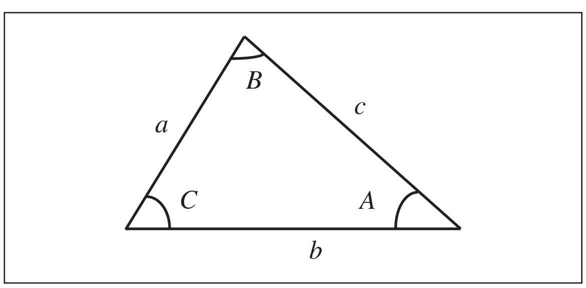


Fig. 9.7

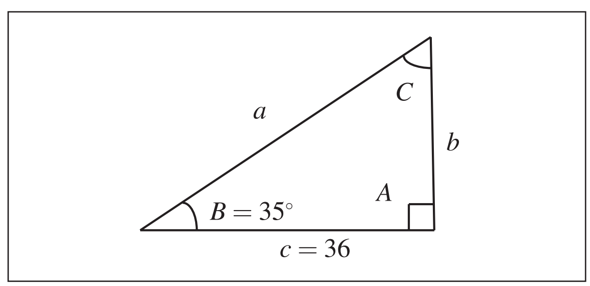


Fig. 9.8

Exemple 9.2.1 (*Resolució de triangles rectangles*) *L'angle des d'un punt de l'horitzontal del terreny cap al punt més alt d'una torre situat a 36 metres del peu de la torre és de 35°. Trobeu l'alçada de la torre i la distància del punt del terreny a l'extrem de la torre.*

Com que

$$\tan B = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c\tan B$$

d'on

$$b \cong 25{,}2 \text{ m}$$

Per trobar la distància a tindrem en compte que

$$\sin B = \frac{b}{a}$$

d'on

$$a = \frac{b}{\sin B} \cong 43{,}9 \text{ m}$$

Exemple 9.2.2 (*Resolució de triangles no rectangles*) *Discutiu totes les construccions possibles de triangles amb angle* $A = \frac{\pi}{6}$, *i costats* $b = 100$ cm *i* $a = 40$ cm.

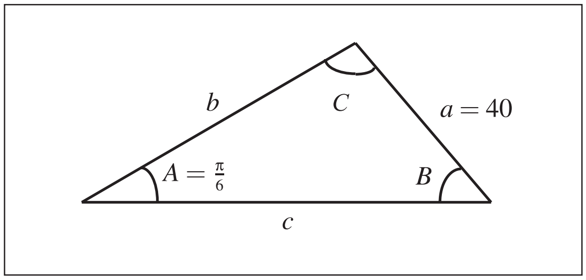


Fig. 9.9

Del teorema del sinus sabem que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

d'on

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a}$$

i en el nostre cas

$$\sin B = \frac{100 \cdot \frac{1}{2}}{40} = \frac{50}{40} = 1{,}25 > 1$$

Per tant, no hi ha cap triangle amb aquestes dades.

9.3 Funcions trigonomètriques

Les funcions trigonomètriques són les funcions sinus, cosinus, tangent, cotangent, secant i cosecant.

9.3.1 Funció sinus

$$\begin{array}{rccc} \sin: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longrightarrow & \sin x \end{array}$$

- $Dom(\sin) = \mathbb{R}$
- $Im(\sin) = [-1,1] \Rightarrow$ la funció sinus és fitada.
- La funció sinus és periòdica, de període 2π.

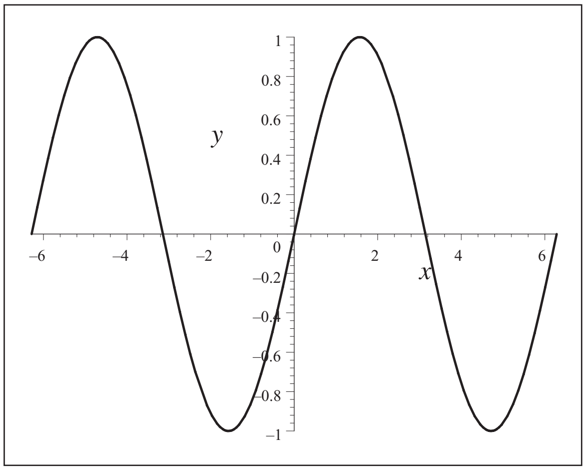


Fig. 9.10 Gràfic de la funció sinus

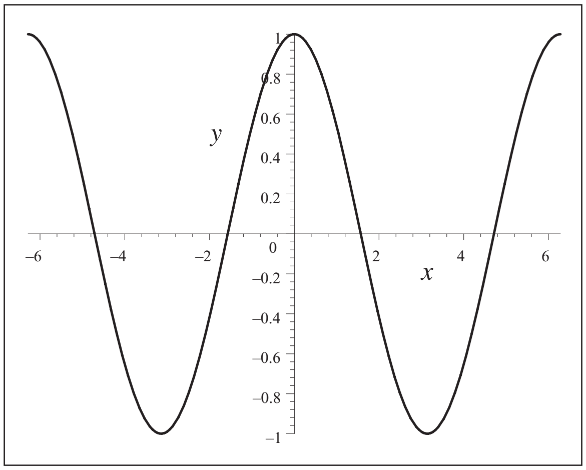


Fig. 9.11 Gràfic de la funció cosinus

9.3.2 Funció cosinus

$$\begin{array}{rccl} \cos: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longrightarrow & \cos x \end{array}$$

- $Dom(\cos) = \mathbb{R}$
- $Im(\cos) = [-1,1] \Rightarrow$ la funció cosinus és fitada.
- La funció cosinus és periòdica, de període 2π.

9.3.3 Funció tangent

$$\begin{array}{rccl} \tan: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \tan x \end{array}$$

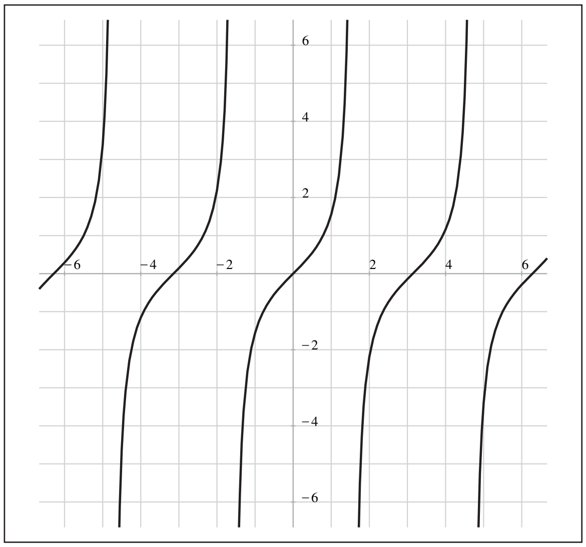


Fig. 9.12 Gràfic de la funció tangent

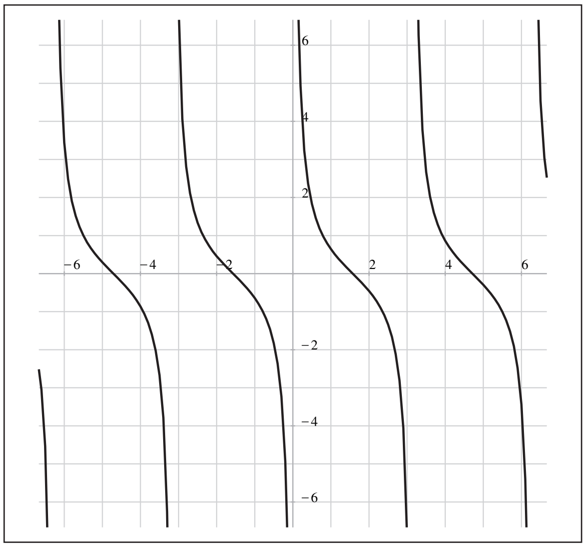


Fig. 9.13 Gràfic de la funció cotangent

- $Dom(\tan) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
- La funció tangent no és fitada.
- La funció tangent és periòdica.

9.3.4 Funció cotangent

$$\begin{array}{rccc} \cot: & \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \end{array}$$

9.3.5 Funció secant

$$\begin{array}{rccc} \sec: & \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \end{array}$$

9.3.6 Funció cosecant

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{cosec}: & \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \mathrm{cosec}\, x = \dfrac{1}{\sin x} \end{array}$$

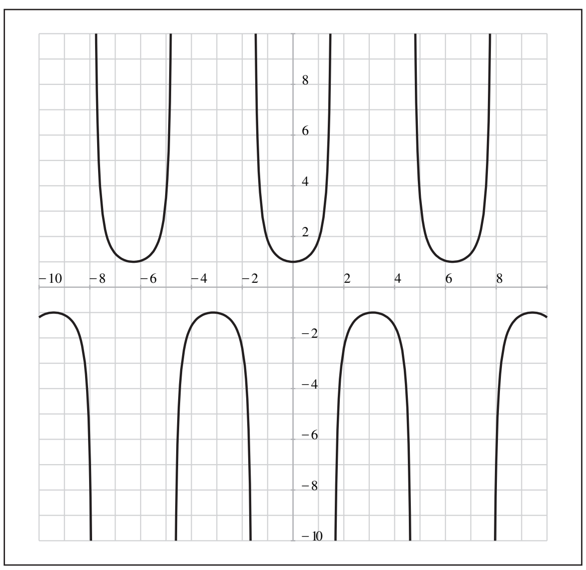


Fig. 9.14 Gràfic de la funció secant

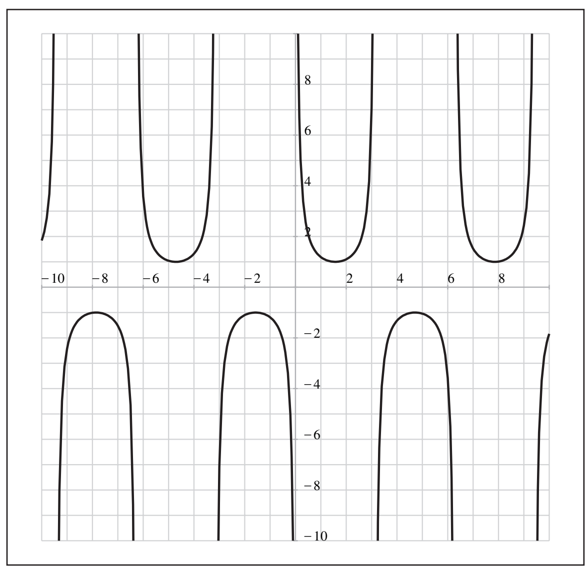


Fig. 9.15 Gràfic de la funció cosecant

9.4 Funcions trigonomètriques inverses

Les funcions trigonomètriques inverses ens permeten resoldre el problema de trobar quin és l'angle o angles que corresponen a un valor determinat d'una funció trigonomètrica.

Tal com veurem amb més detall al capítol 11, únicament per a aquelles funcions $f : A \longrightarrow B$ que siguin bijectives, és a dir, que per a tot $y_0 \in B$, $f^{-1}(y_0) = \{x_0\}$ serà possible construir una funció $f^{-1} : B \longrightarrow A$ tal que

$$\forall x_0 \in A \quad (f^{-1} \circ f)(x_0) = x_0$$

i

$$\forall y_0 \in B \quad (f \circ f^{-1})(y_0) = y_0$$

Les funcions trigonomètriques no són injectives en tot el seu domini, per tant no són bijectives, però aquesta dificultat la podem superar prenent com a domini de la funció un subconjunt de $\mathbb{R}$ tal que sobre ell la funció sigui injectiva i el recorregut de B coincideixi amb el de la funció original.

9.4.1 Funció arc sinus

La funció arc sinus és la inversa de la funció sinus, considerant

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

perquè en aquest interval la funció sinus és injectiva.

Definició 9.4.1 (*Funció arc sinus*)

$$\begin{array}{llll} \arcsin : & [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \longrightarrow & y \quad = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x \end{array}$$

És important comentar que hi ha autors que la funció arcsin x l'anomenen $\sin^{-1} x$. Observeu que $\sin^{-1} x$ no és igual que $\dfrac{1}{\sin x}$.

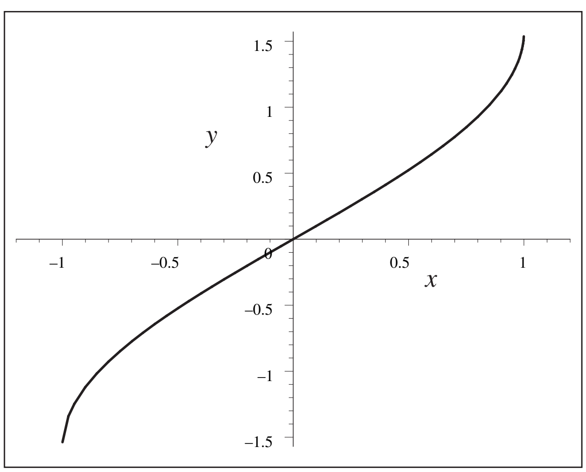


Fig. 9.16 Gràfic de la funció arc sinus

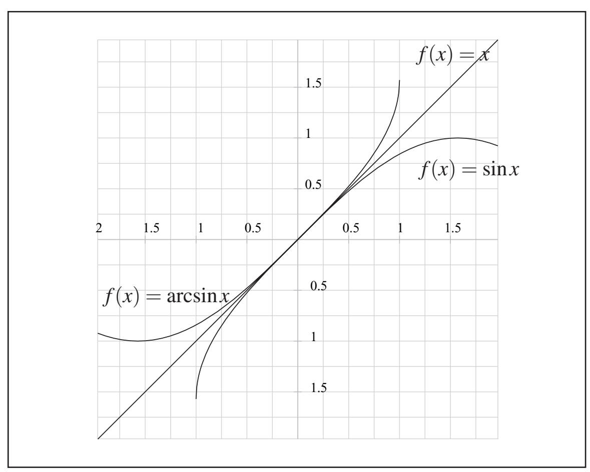


Fig. 9.17 Gràfic comparatiu de les funcions sinus i arc sinus

Observem que aquest gràfic i el gràfic de la funció sinus són simètrics respecte a la recta $y = x$ i això s'explica pel fet que són funcions inverses una de l'altra.

Propietat 9.4.1 *Es compleix que*

$$\arcsin(\sin x) = x$$
$$\sin(\arcsin x) = x$$

9.4.2 Funció arc cosinus

Com que la funció cosinus és estrictament decreixent a l'interval $[0,\pi]$ i a més a més es compleix que $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$, si restringim la funció a l'interval $[0,\pi]$ podem definir la funció inversa del cosinus que s'anomena arc cosinus.

Definició 9.4.2 (*Funció arc cosinus*)

$$\begin{array}{rccl} \arccos: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & x & \longrightarrow & y \quad \textit{tal que } \cos y = x \end{array}$$

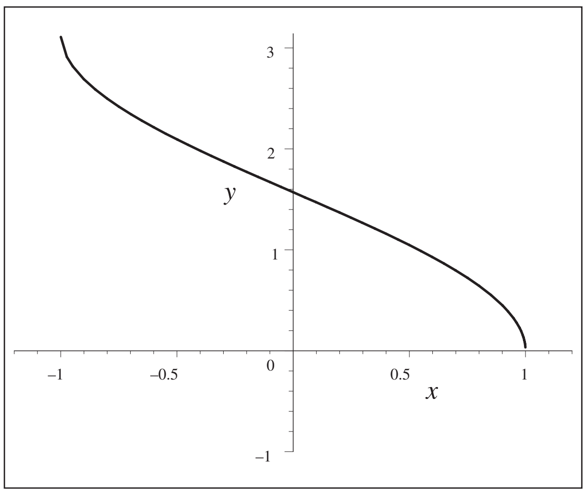


Fig. 9.18 Gràfic de la funció arc cosinus

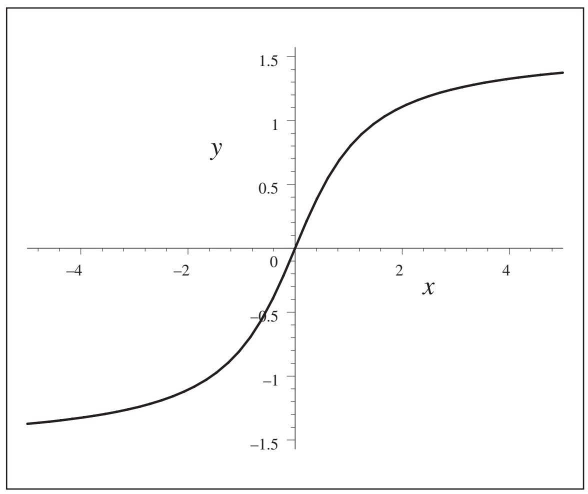


Fig. 9.19 Gràfic de la funció arc tangent

9.4.3 Funció arc tangent

Com que la funció tangent és estrictament creixent a l'interval $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, podem definir la funció inversa que s'anomena arc tangent.

Definició 9.4.3 (*Funció arc tangent*)

$$\begin{array}{rccl} \arctan: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \\ & x & \longrightarrow & y \quad \textit{tal que } \tan y = x \end{array}$$

9.5 Funcions hiperbòliques

Les funcions hiperbòliques són semblants a les trigonomètriques perquè tenen la mateixa relació amb la hipèrbola que les trigonomètriques tenen amb la circumferència. És per aquest motiu que s'anomenen funcions hiperbòliques. Les funcions trigonomètriques també s'anomenen circulars perquè es defineixen sobre una circumferència de radi 1, entenent que l'angle t de la figura 9.20 es mesura en radians.

De la mateixa manera, si en lloc de considerar una circumferència de radi 1 considerem la hipèrbola $x^2 - y^2 = 1$, tenim (veure la figura 9.21):

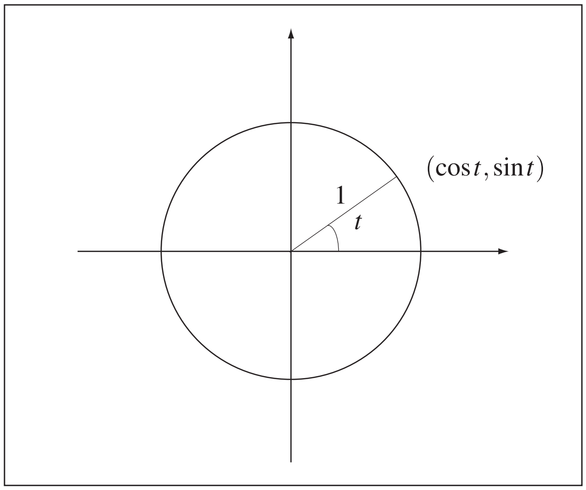


Fig. 9.20 Trigonometria circular

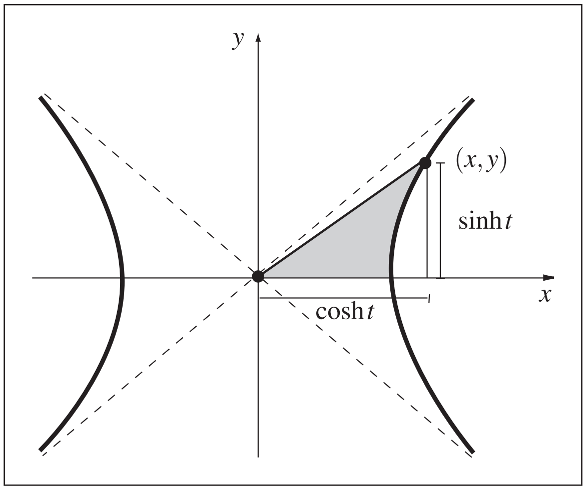


Fig. 9.21 Trigonometria hiperbòlica

on $t \in \mathbb{R}$. En aquest cas la variable t no representa un angle, sinó el doble de l'àrea del sector ombrejat a la figura 9.21.

Definició 9.5.1 (*Funció sinus hiperbòlic*) *Per a tot $x \in \mathbb{R}$ es defineix la funció sinus hiperbòlic com a*

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

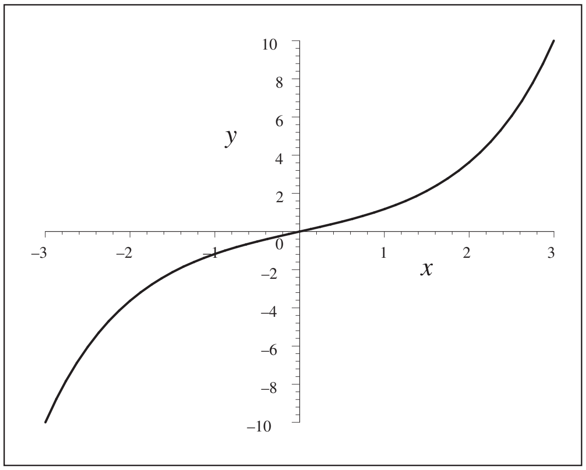


Fig. 9.22 Gràfic de la funció sinus hiperbòlic

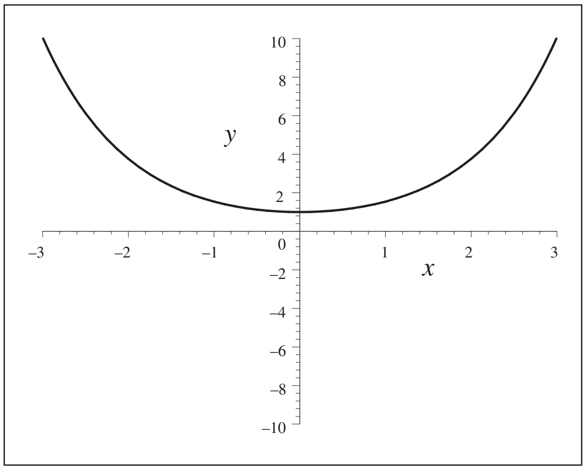


Fig. 9.23 Gràfic de la funció cosinus hiperbòlic

Definició 9.5.2 (*Funció cosinus hiperbòlic*) *Per a tot $x \in \mathbb{R}$ es defineix la funció cosinus hiperbòlic com a*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

L'aplicació més coneguda de les funcions hiperbòliques és el problema següent:

Determinar la forma exacta de la corba que forma una cadena o un cable flexible de densitat uniforme que està suspesa entre dos punts i penja sota l'acció del seu propi pes. Aquesta corba s'anomena *catenària*, de *catena*, la paraula llatina per cadena.

L'equació cartesiana de la catenària és $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ (la seva forma es pot apreciar al gràfic 9.23, cas particular de catenària quan $a = 1$) i és la base de moltíssimes aplicacions pràctiques de problemes tals com la corba de les línies telefòniques o el disseny de ponts penjants, com el Golden Gate de San Francisco o el pont de Brooklyn a Nova York.

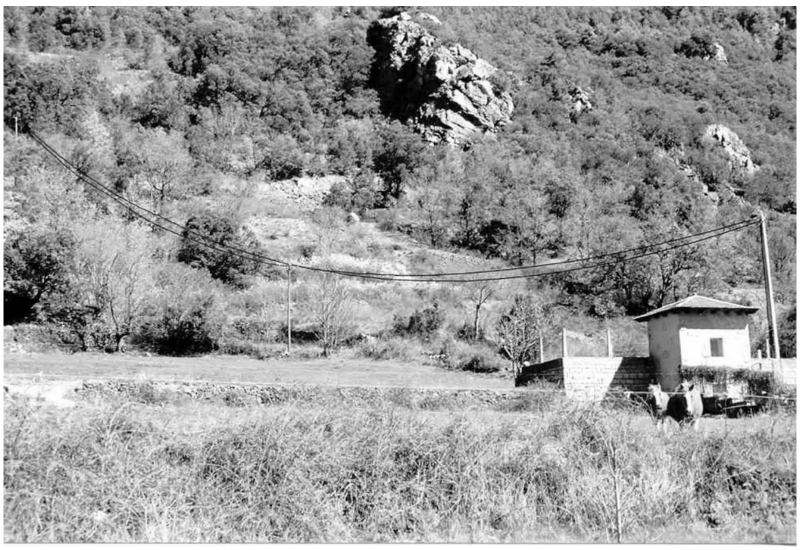


Fig. 9.24 Corba de línies telefòniques

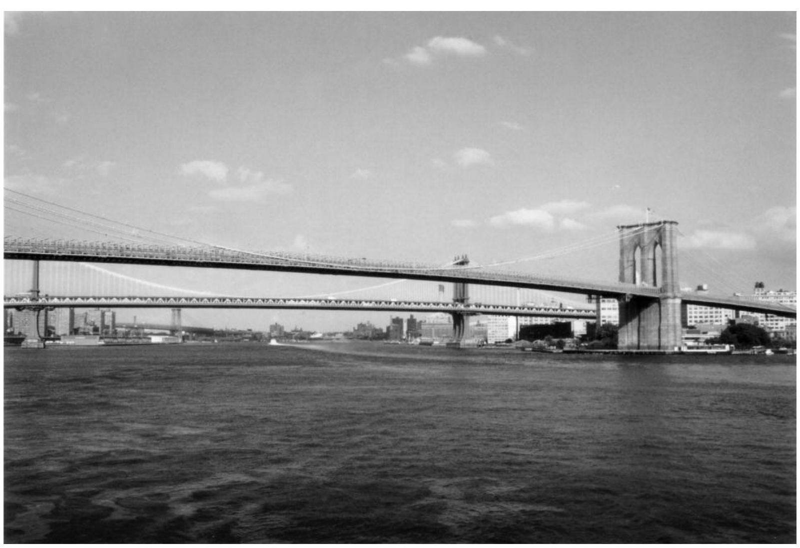


Fig. 9.25 Pont de Brooklyn

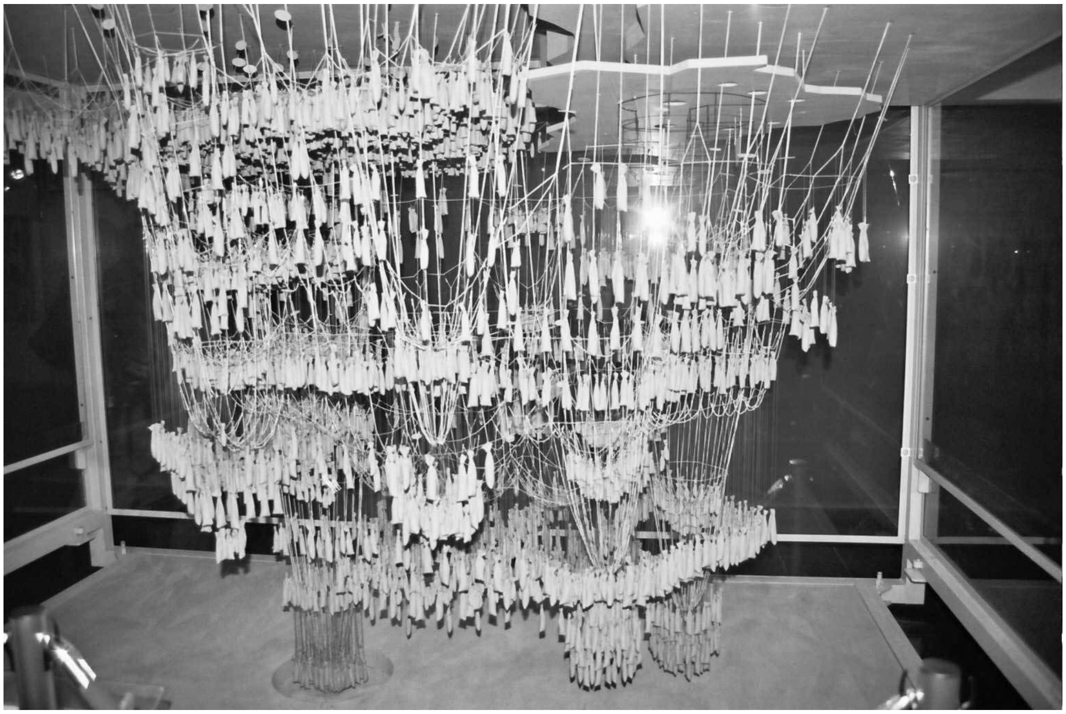


Fig. 9.26 Model funicular de l'església de la Colònia Güell

Potser també heu sentit a parlar dels arc catenaris de Gaudí. La corba catenària s'havia estudiat en física i matemàtiques molt abans de Gaudí, pero va ser ell el primer a descobrir que la simetrització de la catenària donava lloc a un dels arcs més perfectes: el que s'aguanta a si mateix. Trobem arcs gaudinians a la cooperativa L'Obrera Mataronense, al col·legi de les Teresianes, a la casa Milà, al mirador de la Finca Güell, a les portes del Palau Güell i a les quadres dels pavellons de la Finca Güell.

La singularitat de Gaudí consisteix a aplicar l'arc catenari espacialment i crear la maqueta de disseny de l'església de la Colònia Güell (colònia tèxtil que Eusebi Güell, destacat industrial i mecenes de les arts i les lletres catalanes, va fundar al municipi de Santa Coloma de Cervelló el 1890).

Per poder dur a terme el projecte de l'església de la Colònia Güell, Gaudí es va inventar un nou mètode de projecció arquitectònica: la maqueta polifunicular. Amb ella, s'obtenia una versió visual invertida 3D d'un projecte que difícilment es podia representar en els tradicionals plànols de dues dimensions.

Com es va construir aquesta maqueta? En un taulell on s'havia dibuixat la planta de l'església, es penjaven unes cordes en els punts corresponents a la cruïlla dels murs o al naixement de les columnes. A continuació, a l'altre extrem de les cordes s'afegien sacs de perdigons que portaven càrregues proporcionals al pes real i generaven les corbes dels arcs corresponents. Un cop definida l'estructura de l'edifici, es folrava amb paper per obtenir les voltes i els murs.

Per últim amb croquis i fotografies i tenint en compte la inversió de 180 graus, Gaudí dibuixava directament esbossos de les solucions definitives dels alçats interiors i exteriors de l'església. Aquest procediment és de gran singularitat en la història de l'arquitectura.

El 1908 es va iniciar la construcció del temple, però el 1914, la família Güell va comunicar a Gaudí que no continuaria finançant les obres en curs i aquest va abandonar el projecte. Tot i quedar inacabada, l'església suposa un punt culminant en l'obra de Gaudí.

Definició 9.5.3 (*Funció tangent hiperbòlica*) *Per a tot $x \in \mathbb{R}$ es defineix la funció tangent hiperbòlica com a*

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

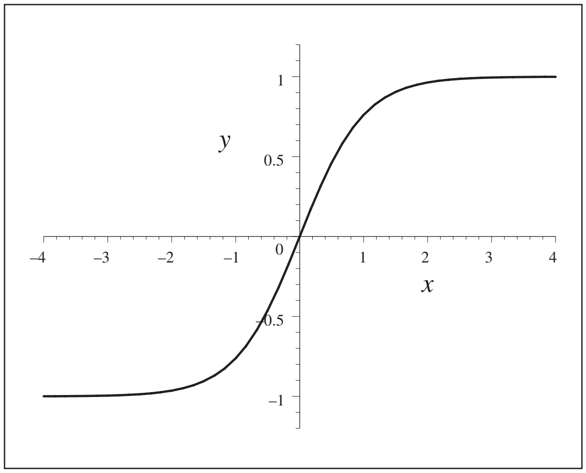


Fig. 9.27 Gràfic de la funció tangent hiperbòlica

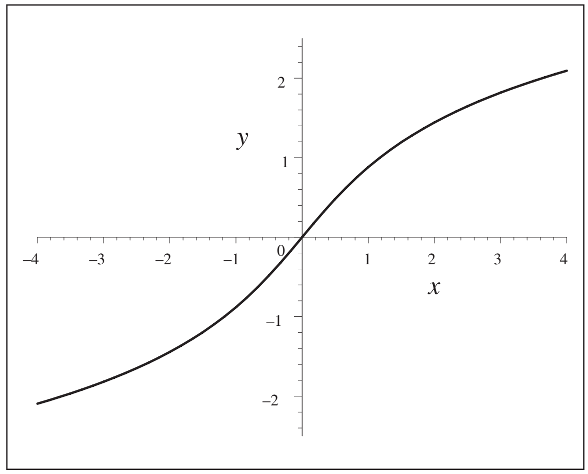


Fig. 9.28 Gràfic de la funció argument sinus hiperbòlic

Observació: Una diferència essencial entre les funcions hiperbòliques i les trigonomètriques és que les hiperbòliques no són funcions periòdiques, tal com podem observar als gràfics.

Propietat 9.5.1 *Per a tot $x \in \mathbb{R}$ es compleix*

$$\begin{aligned}
&\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \\
&\sinh(-x) = -\sinh x \quad (\Rightarrow \sinh x \textit{ és senar}) \\
&\cosh(-x) = \cosh x \quad (\Rightarrow \cosh x \textit{ és parell}) \\
&\tanh(-x) = -\tanh x \quad (\Rightarrow \tanh x \textit{ és senar}) \\
&\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
&\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y \\
&\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
&\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y
\end{aligned}$$

Observem que no és una còpia mimètica de les propietats de les funcions circulars.

Les funcions hiperbòliques inverses tenen interès en matemàtiques, bàsicament perquè ens permeten expressar un cert tipus d'integrals de manera més senzilla.

La funció $\sinh x$, com que és bijectiva en el seu domini, permet definir una funció inversa que s'anomena argument sinus hiperbòlic.

Definició 9.5.4 (*Argument sinus hiperbòlic*) *La funció argument sinus hiperbòlic que s'expressa* $\arg\sinh$ *es defineix a $\mathbb{R}$ com a*

$$y = \arg\sinh x \Leftrightarrow x = \sinh y$$

Recordem que aquest gràfic es pot obtenir pel fet de ser la funció inversa de la funció $\sinh x$, com la simètrica de $y = \sinh x$ respecte de la recta $y = x$.

Observació: Les altres funcions hiperbòliques inverses es defineixen de manera anàloga.

Propietat 9.5.2 (*Aplicació a la simplificació d'expressions*)

$$\begin{aligned}
\arg\sinh x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) && \forall x \in \mathbb{R} \\
\arg\cosh x &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}) && \forall x \in \mathbb{R}: \quad x \geq 1 \\
\arg\tanh x &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} && \forall x \in \mathbb{R}: \quad |x| < 1
\end{aligned}$$

Per consolidar els conceptes de trigonometria podeu veure la pàgina
`http://www.wiris.net/upc.edu/collection`

10

Funcions exponencials i funcions logarítmiques

Les funcions exponencials històricament es solen atribuir a Jean Bernoulli (1667-1748) perquè es va dedicar a estudiar no només les corbes exponencials simples $y = a^x$, sinó també les exponencials generals, com ara $y = x^x$. Al calcular l'àrea limitada per la corba $y = x$, i les rectes $x = 0$ i $x = 1$, va trobar la sorprenent representació en forma de sèrie

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots$$

resultat que va obtenir d'escriure $x^x = e^{x \ln x}$, desenvolupant amb la sèrie de la funció exponencial i integrant terme per terme, utilitzant el mètode d'integració per parts.

10.1 Funció exponencial

Definició 10.1.1 (*Funció exponencial*) *Donat a un nombre real estrictament positiu diferent de 1 ($a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$), definim la funció exponencial de base a com la funció real de variable real*

$$\begin{aligned} exp_a: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \exp_a(x) = a^x \end{aligned}$$

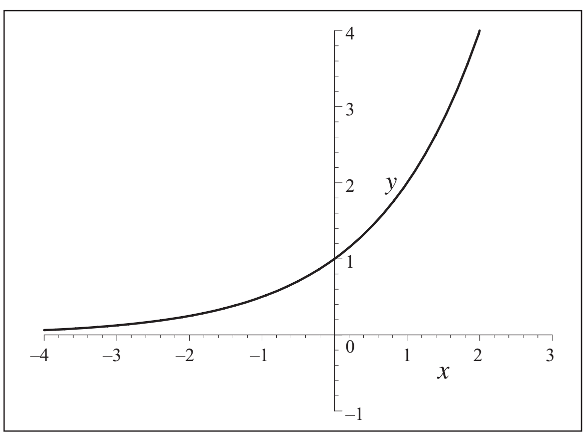


Fig. 10.1 Gràfic de la funció 2^x

Observem que si $a < 0$, hi ha valors de $x \in \mathbb{R}$ tals que a^x no és un nombre real. Per exemple, si $a = -2$ i $x = -\frac{1}{2}$, $(-2)^{-1/2} = \dfrac{1}{(-2)^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{-2}} \notin \mathbb{R}$.

Representació gràfica

Els gràfics de les figures s'han obtingut amb MAPLE, tal com indica la figura 10.1.

Si $a > 1$, la funció exponencial és estrictament creixent en $\mathbb{R}$, veiem a la figura 10.1 el cas particular de $a = 2$.

```
> plot(2^x,x=-2..2,y=-1..4);
```

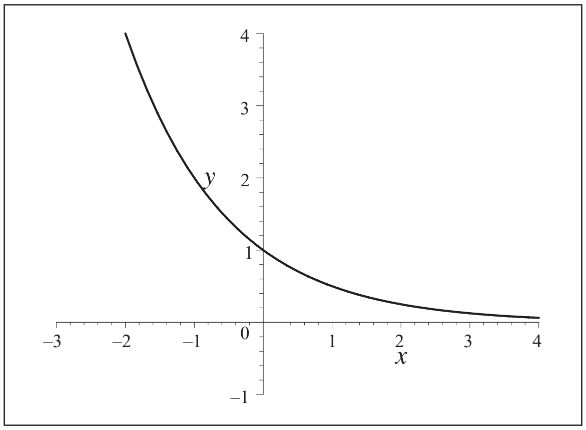


Fig. 10.2 Gràfic de la funció $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

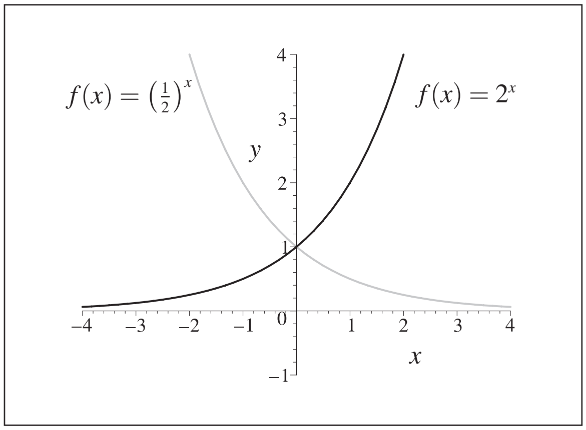


Fig. 10.3 Gràfics de les funcions 2^x i $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Si $0 < a < 1$, la funció és estrictament decreixent en $\mathbb{R}$, tal com es veu a la figura 10.2

Observem a la figura 10.3 que els dos gràfics són simètrics respecte de l'eix OY.

En general, el gràfic de la funció exponencial $y = a^x$ $(a > 1)$ és simètric respecte de l'eix OY del gràfic de la funció $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ $\left(\frac{1}{a} < 1\right)$

10.1.1 La base natural e

El límit

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

existeix i s'anomena e. El nombre e se l'anomena base exponencial natural i dóna lloc a la funció exponencial e^x.

El nombre e és irracional i, per tant, té una representació decimal infinita no periòdica. Les primeres quinze xifres de la seva representació decimal són $e = 2.718281828459045$.

La funció $f(x) = e^x$ té una importància especial pel fet que les solucions de gran nombre de problemes de matemàtica aplicada són potències del nombre e. Així, per exemple, la solució de problemes d'equilibri d'un cable flexible, el pas transitori de corrent elèctric per un circuit i la desintegració d'elements radioactius s'expressen mitjançant funcions de caire exponencial de la forma Ae^{bx} on b pot ser positiu o negatiu i depèn dels paràmetres físics del problema.

10.1.2 Propietats de la funció exponencial

Considerem x, y nombres reals i a, b nombres reals positius. Aleshores,

1. La funció exponencial és injectiva, és a dir,

   Si $a \neq 1$, aleshores $a^x = a^y \Longleftrightarrow x = y$

2. La funció exponencial creix si $a > 1$ i decreix si $0 < a < 1$

   Si $x > y$ i $a > 1$, aleshores $a^x > a^y$

   Si $x > y$ i $0 < a < 1$, aleshores $a^x < a^y$
3. $a^1 = a$
4. $a^0 = 1$
5. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
6. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
7. $a^{xy} = (a^x)^y$
8. $a^{1/x} = \sqrt[x]{a}$
9. $a^{y/x} = \sqrt[x]{a^y}$
10. $(ab)^x = a^x b^x$
11. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
12. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
13. Si $a > 1$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

    $\lim\limits_{x\to-\infty} a^{-x} = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{-x} = 0$

    Si $0 < a < 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

Exemple 10.1.1 *Simplifiqueu les expressions següents:*

1. $\sqrt[4]{\dfrac{x^4y^{12}}{z^8}}$ *2.* $(x^{-1}+y^{-1})^{-1}$

Solució:

1. $\sqrt[4]{\dfrac{x^4y^{12}}{z^8}} = \left(\dfrac{x^4y^{12}}{z^8}\right)^{\frac{1}{4}} = \dfrac{x^{\frac{4}{4}}y^{\frac{12}{4}}}{z^{\frac{8}{4}}} = \dfrac{|x||y|^3}{z^2}$
2. $(x^{-1}+y^{-1})^{-1} = \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^{-1} = \left(\dfrac{y+x}{xy}\right)^{-1} = \dfrac{xy}{y+x}$

Podeu comprovar aquests i altres resultats de simplificacions amb programes de càlcul matemàtic, com per exemple MAPLE.

```
> simplify((x^(4)*y^(12)/z^(8))^(1/4),sqrt,symbolic);
```

$$\frac{xy^3}{z^2}$$

```
> simplify((x^(-1)+y^(-1))^(-1),sqrt,symbolic);
```

$$\frac{xy}{y+x}$$

Exemple 10.1.2 *Demostreu les propietats següents per a exponents racionals, $\frac{m}{n} > 0$, $\frac{p}{q} > 0$, suposant que són certes per a exponents enters.*

1. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$
2. $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$
3. $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$
4. $a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{m}{n}}$

Solució:

1. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \cdot a^{\frac{pn}{qn}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

   Observem que si els exponents fossin negatius:

$$a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}} = a^{-(\frac{m}{n}+\frac{p}{q})}$$

2. $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$
3. $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^{m/n})^p} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[qn]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{qn}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$
4. $a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{(ab)^m} = (ab)^{\frac{m}{n}}$

Exemple 10.1.3 *Ordeneu els nombres reals següents de més gran a més petit.*

$$5^{-9/2},\ \sqrt[7]{5^3},\ \left(\frac{1}{5}\right)^3,\ \left(\frac{1}{5}\right)^{-1},\ 5^{2/7},\ \sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^3},\ \left(\frac{1}{5}\right)^{7/2}$$

Tenim que

$$5^{-9/2},\ \sqrt[7]{5^3} = 5^{3/7},\ \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 5^{-3},\ \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5^1,$$

$$5^{2/7},\ \sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = 5^{-3/5},\ \left(\frac{1}{5}\right)^{7/2} = 5^{-7/2}$$

Per tant, com que $5 > 1$, la funció $f(x) = 5^x$ és creixent i l' ordenació dels nombres de més gran a més petit és:

$$5^1 > 5^{3/7} > 5^{2/7} > 5^{-3/5} > 5^{-3} > 5^{-7/2} > 5^{-9/2}$$

Exemple 10.1.4 *Resoleu a $\mathbb{R}$ l'equació* $3^{x+1} = 27$

Sabem que $27 = 3^3$, per tant, $3^{x+1} = 3^3$. Com que la funció exponencial és injectiva, tenim que

$$x + 1 = 3 \Longrightarrow x = 2$$

Exemple 10.1.5 *Resoleu a $\mathbb{R}$ l'equació* $9^x + 3^x = 6642$

Podem escriure l'equació $9^x + 3^x = 6642$ com a

$$(3^2)^x + 3^x = 6642 \Leftrightarrow (3^x)^2 + 3^x = 6642$$

Fem el canvi de variable $y = 3^x$ i queda l'equació de segon grau:

$$y^2 + y = 6642 \Leftrightarrow y^2 + y - 6642 = 0$$

que resolem

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 6642}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 26568}}{2} = \frac{1 \pm 163}{2} \begin{array}{l} \nearrow \dfrac{-1+163}{2} = 81 \\ \searrow \dfrac{-1-163}{2} = -82 \end{array}$$

Si $y = 81 = 3^4 = 3^x \Rightarrow x = 4$

Si $y = -82$ no té sentit perquè $y = 3^x$ sempre és positiu.

Per tant, l'equació $9^x + 3^x = 6642 \Rightarrow x = 4$

Exemple 10.1.6 *Resoleu a $\mathbb{R}$ el sistema*

$$\left.\begin{array}{l} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 256 \end{array}\right\}$$

Podem escriure el sistema com a

$$\left.\begin{array}{l} 5^x = 5^y \cdot 5^4 \\ 2^x \cdot 2^y = 2^8 \end{array}\right\}$$

Per tant,

$$\left.\begin{array}{l} 5^x = 5^{y+4} \\ 2^{x+y} = 2^8 \end{array}\right\} \text{ d'on } \left.\begin{array}{l} x = y + 4 \\ x + y = 8 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x - y = 4 \\ x + y = 8 \end{array}\right\}$$

d'on $x = 6$ i $y = 2$

10.2 Funció logarítmica

Definició 10.2.1 (*Funció logarítmica*) *Donat a un nombre real estrictament positiu diferent de 1 ($a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$), definim la funció logarítmica de base a com a*

$$\begin{array}{rccl} \log_a : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \log_a(x) \end{array}$$

essent

$$\log_a x = y \Longleftrightarrow a^y = x$$

és a dir, és la inversa de la funció exponencial de base a.

Representació gràfica

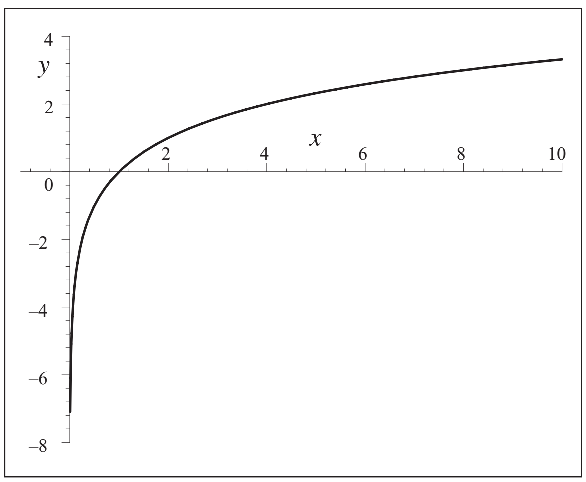


Fig. 10.4 Gràfic de la funció $\log_2$

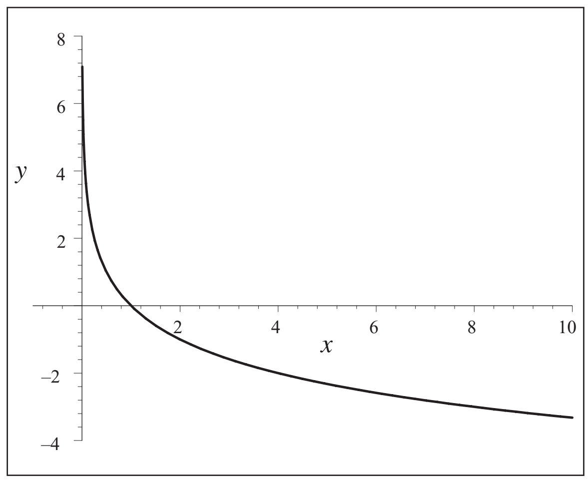


Fig. 10.5 Gràfic de la funció $\log_{\frac{1}{2}}$

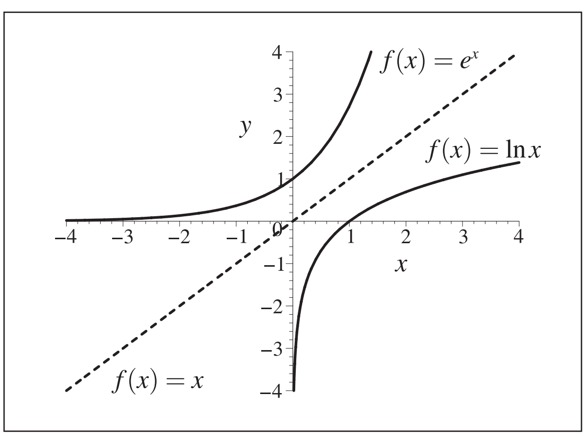


Fig. 10.6 Gràfic comparatiu de e^x i $\ln(x)$

Si $a > 1$ la funció logarítmica és creixent, com veiem per exemple a la figura 10.4 que representa el cas particular $a = 2$.

Si $a < 1$, la funció logarítmica és decreixent, tal com veiem per exemple per a $a = \frac{1}{2}$ a la figura 10.5.

Hem definit la funció logarítmica de base a com la inversa de la funció exponencial de base a i sabem que la interpretació geomètrica que dues funcions reals de variable real són inverses és la seva simetria respecte de la recta $y = x$. Això és justament el que es veu al gràfic de la figura 10.6.

10.2.1 Casos particulars d'interès

Si $a = 10$, f és el logaritme comú: $f(x) = \log(x)$

Si $a = e$, f és el logaritme neperià: $f(x) = \ln(x)$

10.2.2 Propietats de la funció logarítmica

Si $a > 0$ i $a \neq 1$ es compleixen:

1. La funció logarítmica és bijectiva en tot el seu domini.
2. Si $a > 1$ la funció $f(x) = \log_a(x)$ és creixent.
   Si $a < 1$ la funció $f(x) = \log_a(x)$ és decreixent.
3. $\log_a(a) = 1$
4. $\log_a(1) = 0$
5. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
6. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
7. $\log_a(x^y) = y\log_a(x)$
8. $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
9. $\log_a(\sqrt[y]{x}) = \dfrac{1}{y}\log_a(x)$
10. Si $a > 1$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a(x) = +\infty$
    Si $a < 1$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a(x) = -\infty$
11. $\lim\limits_{x\to b} \log_a(x) = \log_a(\lim\limits_{x\to b} x)$
    (és a dir, el límit d'un logaritme és el logaritme del límit)
    Observació: aquesta propietat és deguda a la continuïtat de la funció logarítmica

Com que la base e és la més freqüent, anomenarem algunes de les propietats dels logaritmes neperians:

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(e) = 1$
3. $e^{\ln(x)} = x, \ \forall x > 0$
4. $\ln(e^y) = y, \ \forall y \in \mathbb{R}$
5. $a^x = e^{x\ln(a)}, \ \forall a > 0, \ a \neq 1$
6. $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}, \ \forall a > 0, \ a \neq 1$

   (aquesta propietat es dedueix de la propietat de canvi de base: $\forall a > 0, \ a \neq 1 \ \ \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$)

Exemple 10.2.1 *Resoleu l'equació* $\log x = 3\log 18 - 4\log 12$.

Aplicant les propietats 6 i 7 de la funció logarítmica, podem escriure que

$$\log x = \log 18^3 - \log 12^4 = \log \frac{18^3}{12^4}$$

d'on

$$x = \frac{18^3}{12^4} = 0.2813$$

Exemple 10.2.2 *Resoleu l'equació* $100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1000^5}$

L'equació que volem resoldre és equivalent a

$$100 \cdot 10^x = 1000^{\frac{5}{x}}$$

Si prenem logaritmes:

$$\log_{10}(100 \cdot 10^x) = \log_{10}\left(1000^{\frac{5}{x}}\right)$$

que fent servir les propietats 5 i 7 de la funció logarítmica es poden escriure com a:

$$\log_{10} 100 + \log_{10} 10^x = \frac{5}{x}\log_{10}(1000)$$

$$\log_{10} 10^2 + x\log_{10} 10 = \frac{5}{x}\log_{10} 10^3$$

que per definició de la funció logarítmica equival a

$$2 + x = \frac{5}{x} \cdot 3 = \frac{15}{x} \Leftrightarrow 2x + x^2 = 15$$

Resolem l'equació de segon grau i obtenim les solucions de l'equació inicial.

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 15}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \begin{array}{l} \nearrow 3 \\ \searrow -5 \end{array}$$

Per tant,

$$100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1000^5} \Leftrightarrow x = 3 \text{ o } x = -5$$

Comprovem-ho:

Si $x = 3$
$$100 \cdot 10^3 = 10^2 \cdot 10^3 = 10^5$$
$$\sqrt[3]{1000^5} = \sqrt[3]{(10^3)^5} = 10^5 \qquad \text{cert.}$$

Si $x = -5$
$$100 \cdot 10^{-5} = 10^2 \cdot 10^{-5} = 10^{-3}$$
$$\sqrt[-5]{1000^5} = (1000)^{-\frac{5}{5}} = (10^3)^{-1} = 10^{-3} \qquad \text{cert.}$$

Exemple 10.2.3 *Resoleu el sistema d'equacions:*

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 65 \\ \log_{10} x + \log_{10} y = 3 \end{array}\right\}$$

Podem escriure el sistema com a

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 65 \\ \log_{10} xy = 3 \end{array}\right\} \quad \text{o bé} \quad \left.\begin{array}{l} x + y = 65 \\ xy = 10^3 \end{array}\right\}$$

Per tant, hem de resoldre

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 65 \\ xy = 1000 \end{array}\right\}$$

Si apliquem, per exemple, el mètode de substitució, de la segona equació tenim que $y = \dfrac{1000}{x}$ (si $x \neq 0$ [2]), que substituint la primera queda

$$x + \frac{1000}{x} = 65$$

d'on $x^2 + 1000 = 65x \Leftrightarrow x^2 - 65x + 1000 = 0$

Resolem l'equació de segon grau:

$$x = \frac{65 \pm \sqrt{65^2 - 4 \cdot 1000}}{2} = \frac{65 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{65 \pm 15}{2} \begin{array}{l} \nearrow \dfrac{80}{2} = 40 \\ \searrow \dfrac{50}{2} = 25 \end{array}$$

Si $x = 40 \Rightarrow y = \dfrac{1000}{40} = 25$

Si $x = 25 \Rightarrow y = \dfrac{1000}{25} = 40$

[2] $x = 0$ no té sentit perquè la funció logarítmica no està definida per $x = 0$.

11 Funcions reals de variable real. Límits i continuïtat

No cal dir que les funcions són les eines bàsiques de l'estudi del Càlcul. Per tant, és molt important saber treballar amb elles i amb els seus conceptes associats. En aquest capítol destacarem la importància del concepte de límit i de continuïtat d'una funció real de variable real.

L'alemany Karl Weierstrass (1815-1897) de la Universitat de Berlín a més de donar una definició satisfactòria de nombre real, va obtenir una definició depurada del concepte de límit. La definició d' Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) –el matemàtic francès més important de la seva època– utilitzava expressions del tipus "valors successius", "aproximar-se indefinidament", o "tan petit com un vulgui", que tot i que són interessants des del punt de vista pedagògic, els manca la precisió que s'espera de les matemàtiques.

H.E. Heine (1821-1881), deixeble de Weierstrass, en la seva obra *Elemente* de 1872, escrita sota la influència directa de Weierstrass, definia el límit d'una funció $f(x)$ en x_0 de la següent forma:

> Si donat qualssevol ε, existeix un η_0 tal que per a $0 < \eta < \eta_0$, la diferència $f(x_0 \pm \eta) - L$ és més petita en valor absolut que ε, aleshores es diu que L es el límit de $f(x)$ per a $x = x_0$.

Tant el llenguatge com el simbolisme utilitzats per Weierstrass i per Heine, precisos i inequívocs, van desterrar de l'anàlisi els recursos d'idees intuïtives per donar lloc a la precisió lògica. Es pot dir que havia arribat l'"Edat del Rigor". Actualment la η de Weierstrass s'ha substituït, gairebé universalment, per una altra lletra grega, la δ, però aquest ha estat pràcticament l'únic canvi, i la definició de límit d'una funció que apareix en els texts és essencialment la mateixa que varen introduir Weierstrass i Heine fa poc més d'un segle.

11.1 Definicions bàsiques

Definició 11.1.1 *Definim* funció *o* aplicació *qualsevol terna* (A,B,f) *formada per dos conjunts no buits* A *i* B *i una correspondència* f *entre ells que assigna a cada element* $x \in A$ *un únic element* $y = f(x) \in B$.

El conjunt A *s'anomena* domini *de la funció i s'escriu* $A = Dom f$. B *és el* conjunt d'arribada *de la funció. Si* (A,B,f) *és una funció, direm que* f *és una funció de* A *en* B *i s'escriu* $f : A \longrightarrow B$ *o bé* $A \xrightarrow{f} B$. *Si* $A \subset \mathbb{R}$ *direm que la funció és* de variable real o d'una variable*; i si* $B \subset \mathbb{R}$ *direm que la funció és* real. *Al nombre* $y = f(x)$ *se l'anomena* valor *o la imatge de* f *en* x. *Direm que* x *és la* variable independent *perquè pot prendre qualsevol valor del domini, i anomenarem* y *la* variable dependent *perquè el seu valor numèric depèn del valor* x.

Definició 11.1.2 *Considerem la funció $f : A \longrightarrow B$.*

1. *El conjunt*

$$f(A) = \{y \in B \mid y = f(x),\ x \in A\}$$

l'anomenem **recorregut** *o* **imatge** *de f. S'escriu Imf.*

2. *El* **gràfic** *de f és el subconjunt de $A \times B$ definit per*

$$Graf(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

3. *Si $y \in B$ s'anomena* **antiimatge** *o* **imatge inversa** *de y el subconjunt de A donat per*

$$f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$$

4. *Si $B' \subset B$, s'anomena* **antiimatge** *de B' el subconjunt de A donat per*

$$f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$$

5. *Si $D \subset A$, s'anomena* **restricció** *de f a D l'aplicació $f|_D : D \longrightarrow B$ definida per $f|_D(x) = f(x)$.*

Definició 11.1.3 *Si $f : A \longrightarrow B$ és una aplicació, llavors*

1. f *és* **injectiva** $\Leftrightarrow [\, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \,] \Leftrightarrow [x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)\,]$
2. f *és* **exhaustiva** $\Leftrightarrow [\, \forall y \in B \;\; \exists x \in A \mid f(x) = y \,]$
3. f *és* **bijectiva** $\Leftrightarrow [\, f$ *és injectiva i f és exhaustiva* $]$

Observem que hi ha figures geomètriques tan importants com per exemple les circumferències o les el·lipses que no es poden transformar en el gràfic d'una funció. No obstant això, l'estudi d'aquestes figures geomètriques es pot reduir a l'estudi de les funcions. Per exemple, les circumferències de centre $(0,0)$ i radi $r > 0$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

estan formades pels gràfics de dues funcions:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad -r \leq x \leq r$$

i

$$g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2} \qquad -r \leq x \leq r$$

Observem que aquestes funcions f i g no són úniques.

També és interessant comentar que hi ha funcions el gràfic dels quals és impossible de dibuixar. Per exemple, la funció

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si \;\; x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

El gràfic d'aquesta funció ha de contenir infinits punts de l'eix horitzontal i també infinits punts de la recta $y = 1$, però no pot contenir cap d'aquestes línies enterament.

11.2 Operacions algebraiques amb funcions

Considerem que $f : A \longrightarrow C$ i $g : B \longrightarrow C$. Aleshores definim

1. **suma** de f i g a la funció $f+g$ definida a $A \cap B$ per

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \;\; \forall x \in A \cap B$$

2. **producte per escalar**. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, la funció producte escalar λf definida a A és

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \;\; \forall x \in A$$

3. **producte** de f i g a la funció fg definida a $A \cap B$ per

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) \;\; \forall x \in A \cap B$$

4. **quocient** de f i g a la funció f/g definida al conjunt $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$ per

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \;\; \forall x \in A \cap B, \; g(x) \neq 0$$

11.3 Alguns tipus de funcions

1. **Funcions polinòmiques**

   Una funció polinòmica és una funció de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

   essent $n \in \mathbb{N}$ i $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ constants.

   Aquestes funcions s'estudien més detalladament al capítol 8.

2. **Funcions racionals**

   Una funció **racional** és un quocient de dues funcions polinòmiques $p(x)$ i $q(x)$

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \;\; \text{si} \;\; q(x) \neq 0$$

   Si el denominador és una constant, aleshores aquest quocient és un polinomi, per tant, els polinomis estan inclosos a les funcions racionals.

   Exemple 11.3.1 *La funció racional més senzilla que no és un polinomi és* $y = \frac{1}{x}$

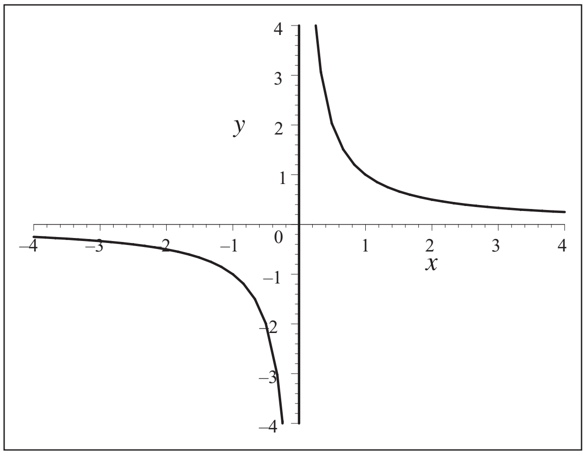


Fig. 11.1 Gràfic de $f(x) = \frac{1}{x}$

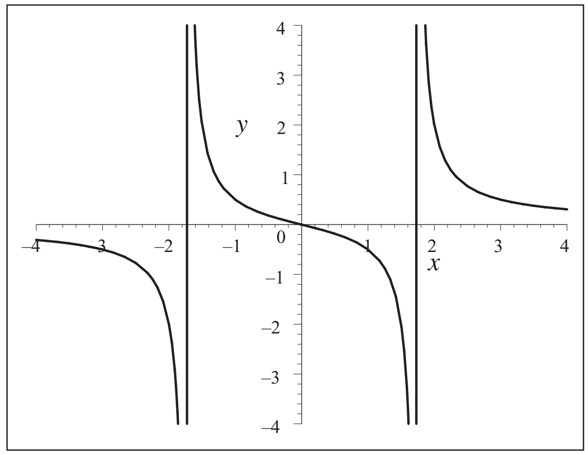


Fig. 11.2 Gràfic de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3}$

Exemple 11.3.2 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3}$

3. Funcions algebraiques

Definició 11.3.1 (*Funció potencial) S'anomena* **funció potencial** *d'exponent r la funció*

$$f(x) = x^r$$

i el seu domini, tal com veurem a continuació, depèn del valor de l'exponent r.

Exemple 11.3.3 *Dibuixeu al mateix gràfic les funcions $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ i $f(x) = x^4$, definides $\forall x \in \mathbb{R}$.*

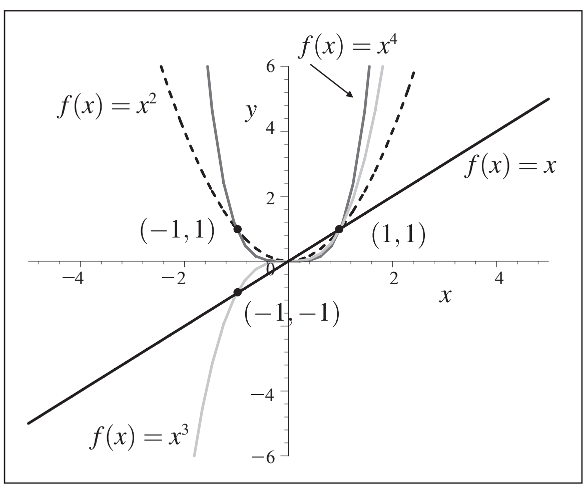


Fig. 11.3 Gràfic de les funcions $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$

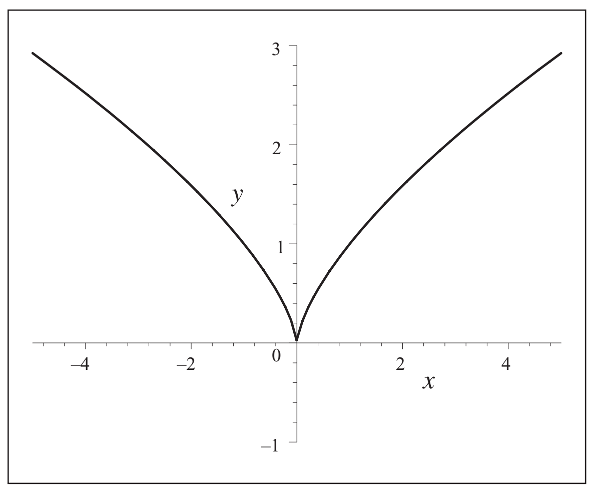


Fig. 11.4 Gràfic de $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

- Si $r \in \mathbb{N}$ s'anomenen **funcions potencials enteres**

$$f(x) = x^n = x \overset{n)}{\cdots} x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Si $r \in \mathbb{Z}^-$ s'anomenen **funcions potencials recíproques**

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

- Si $r = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ s'anomenen **radicals**

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

(si n és parell, $n \neq 0$ aleshores només es defineix per a $x \geq 0$)

Exemple 11.3.4 *Dibuixeu $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. (Veure la figura 11.4)*

Definició 11.3.2 (*Funció algebraica)*

Una funció s'anomena **algebraica** *si es pot construir a partir de funcions polinòmiques i amb les operacions de suma, resta, multiplicació, divisió o radicació.*

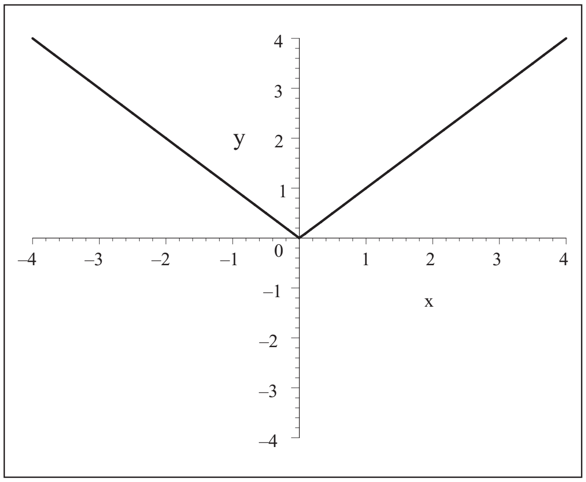


Fig. 11.5 Gràfic de $f(x) = |x|$

Exemple 11.3.5 $f(x) = |x|$
Observem que qualsevol funció racional és algebraica.

Observem que aquesta funció és algebraica perquè $|x| = \sqrt{x^2}$.

4. **Funcions transcendents**

   Qualsevol funció que no és algebraica s'anomena **transcendent**. Exemples de funcions transcendents són les funcions trigonomètriques, funcions exponencials i logarítmiques. Aquestes funcions s'estudien més detalladament als capítols 9 i 10.

11.4 Composició de funcions i funció inversa

Definició 11.4.1 (*Composició de funcions*) *Considerem dues funcions $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que $f(A) \subset B$. Definim la* **funció composta** *de f i g, que escriurem com a $g \circ f$, com a*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A$$

Observacions: la composició de funcions no és commutativa (és a dir, $g \circ f$ no coincideix amb $f \circ g$; de fet pot existir una i l'altra no), és associativa i té element neutre (la funció identitat, $I(x) = x$).

Definició 11.4.2 *(Inversa d'una funció) Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ és una aplicació bijectiva sobre $f(A)$,* (*observem que si $f : A \longrightarrow f(A)$ aleshores una funció injectiva és bijectiva*), *aleshores podem definir la* **funció inversa** *de f respecte de la composició, que escriurem f^{-1}, i definida a $f(A)$ com a*

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

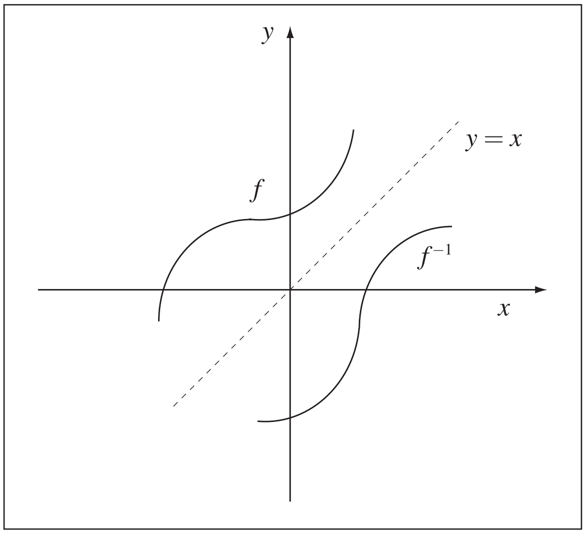


Fig. 11.6

Com a conseqüència de la definició, es compleix que

$$f^{-1} \circ f = I_A \ \ i \ \ f \circ f^{-1} = I_{f(A)}$$

Com que

$$Graf(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

i

$$\begin{aligned} Graf(f^{-1}) &= \{(y, f^{-1}(y)) \mid y \in f(A)\} = \\ &= \{(f(x), x) \mid x \in A\}, \end{aligned}$$

els gràfics de les funcions f i f^{-1} són simètriques respecte de les bisectrius del primer i tercer quadrant tal com es veu a la figura 11.6.

Exemple 11.4.1 *Trobeu la inversa de la funció* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida per* $f(x) = \frac{1}{x}$.

Com que f és injectiva a $Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$ podem parlar de la seva inversa.

$$f^{-1}(x) = f(x) = \frac{1}{x}$$

perquè

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = I(x)$$

En aquest cas, doncs, $f = f^{-1}$.

Observeu que no s'ha de confondre la funció inversa amb la funció recíproca.

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

Exemple 11.4.2 *Estudieu la inversa de la funció* $f : A \longrightarrow [-1, 1]$ *definida per* $f(x) = \sin x$.

Observem que f no és injectiva en el seu domini, per tant, en principi, no podríem calcular la seva funció inversa.

Però al capítol 9, a l'estudiar les funcions trigonomètriques, hem definit la funció $g(x) = \arcsin x$ com la funció inversa de $f(x) = \sin x$. Quin és el problema? La solució és considerar una restricció de la funció $f(x) = \sin x$ a un domini on hi hagi injectivitat.

11.5 Límit d'una funció en un punt

La definició de límit és el concepte més important del càlcul, perquè moltes definicions importants es basen en aquest concepte, encara que no és un concepte senzill de definir.

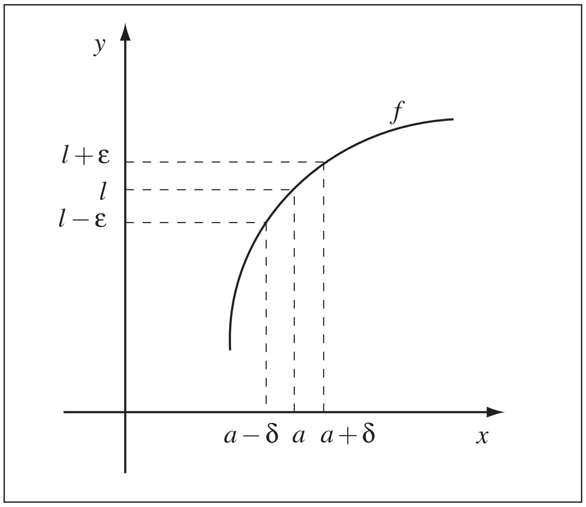


Fig. 11.7

Sigui $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció. La idea intuïtiva que el límit de f quan x tendeixi a a sigui l, és que els valors de $f(x)$ siguin arbitràriament propers a l sempre que els valors de x siguin suficientment a prop de a, però diferents de a. Per poder assegurar que sempre hi ha punts de A propers a a suposarem que aquest és el que s'anomena un **punt d'acumulació** de A. Un punt a és un punt d'acumulació del conjunt A, i s'escriu $a \in A'$, si en tot entorn d'aquest punt a hi ha altres elements del conjunt A, a més de a.

Definició 11.5.1 (*Límit d'una funció en un punt*) *Sigui $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció i sigui $a \in A$ un punt d'acumulació. Direm que el* **límit** *de $f(x)$ en el punt a és l, i ho escriurem $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ o bé $\lim\limits_{a} f$, si*

per a tot $\varepsilon > 0$ existeix algun $\delta > 0$ tal que, per a tot x, si $0 < |x-a| < \delta$, llavors $|f(x)-l| < \varepsilon$

que també podem escriure com a:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{tal que} \ \forall x \in A : \ 0 < |x-a| < \delta \ \text{aleshores} \ |f(x)-l| < \varepsilon$$

Observem que δ depèn de ε i, per tant, fixat ε es pot calcular la δ que li correspon.

Propietat 11.5.1 (*Unicitat del límit*) *El límit d'una funció en un punt, en cas de que existeixi, és únic.*

Observació: la definició de límit d'una funció en un punt no dóna un mètode pràctic per calcular aquest límit, ja que el valor del límit apareix a la definició. És per això que convé establir mètodes de càlcul que es deduiran de diferents propietats del límit d'una funció en un punt.

Propietat 11.5.2 (*Àlgebra de límits de funcions*) *Siguin $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ dues funcions i sigui a un punt d'acumulació de $A \cap B$. Si existeixen $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l_2$ i són finits, aleshores*

1. $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = l_1 + l_2$
2. $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f)(x) = \lambda l_1$
3. $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = l_1 l_2$
4. $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{l_1}{l_2}$ *si* $l_2 \neq 0$

Propietat 11.5.3 *Si $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció i a és un punt d'acumulació de A. Aleshores,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Longrightarrow \lim_{x \to a} |f(x)| = |l|$$

Propietat 11.5.4 *Si $f,g : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ són dues funcions tals que $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in A$, i a és un punt d'acumulació en el qual existeixen els límits*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1\ ,\ \ \lim_{x\to a} g(x) = l_2$$

aleshores,

$$l_1 \leq l_2$$

Com a conseqüència de la propietat anterior tenim el següent.

Propietat 11.5.5 (*Criteri de compressió*) *Siguin* $f,g,h : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funcions tals que*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \ \ \forall x \in A$$

i sigui a *un punt d'acumulació de* A. *Si es compleix que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = l$$

aleshores,

$$\lim_{x\to a} h(x) = l$$

Propietat 11.5.6 *Siguin* $f,g : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funcions i* a *un punt d'acumulació de* A *tals que*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$
2. g *és una funció fitada en un entorn de* a

aleshores,

$$\lim_{x\to a} (fg)(x) = 0$$

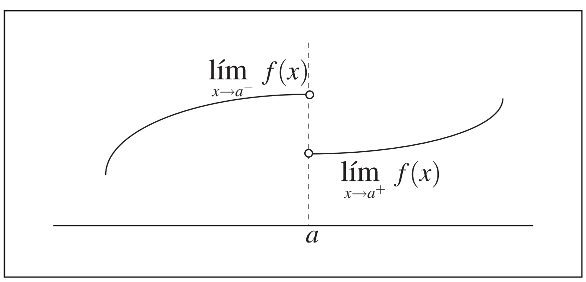


Fig. 11.8

Exemple 11.5.1 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ *perquè*

$$\lim_{x\to 0} x = 0$$

i la funció $\sin\frac{1}{x}$ *està fitada en un entorn de l'origen, perquè*

$$|\sin\frac{1}{x}| \leq 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Definició 11.5.2 (*Límits laterals*) *Sigui* $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *i* a *un punt d'acumulació de* A. *Definim* **límit lateral per la dreta**

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \ \ \forall x : \ \ 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

i anàlogament **límit lateral per l'esquerra**

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \ \ \forall x : \ \ 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Propietat 11.5.7 *Sigui $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció i a un punt d'acumulació de A. Aleshores,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l$$

Exemple 11.5.2 *Calculeu* $\lim_{x \to 1} e^{\frac{1}{x-1}}$

$$\lim_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = 0$$

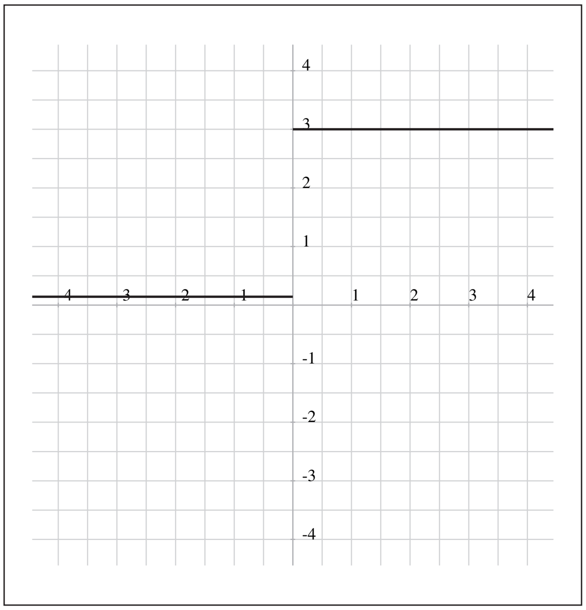


Fig. 11.9 Gràfic de $\dfrac{2x+|x|}{4x-3|x|}$ al voltant de $x=0$

Per tant,

$$\nexists \lim_{x \to 1} e^{\frac{1}{x-1}}$$

Exemple 11.5.3 *Calculeu* $\lim_{x \to 0} \dfrac{2x+|x|}{4x-3|x|}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x+|x|}{4x-3|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x+x}{4x-3x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2x+|x|}{4x-3|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x-x}{4x+3x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{7x} = \frac{1}{7}$$

Com que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x+|x|}{4x-3|x|} \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{2x+|x|}{4x-3|x|}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x+|x|}{4x-3|x|} \quad \text{no existeix}$$

Amb MAPLE podem confirmar que aquest límit no existeix, i podem obtenir els límits laterals.

```
> limit((2*x+abs(x))/(4*x-3*abs(x)),x=0);
```

$$undefined$$

```
> limit((2*x+abs(x))/(4*x-3*abs(x)),x=0,left);
```

$$\frac{1}{7}$$

```
> limit((2*x+abs(x))/(4*x-3*abs(x)),x=0,right);
```

$$3$$

11.6 Extensió del concepte de límit. Indeterminacions

Definició 11.6.1 (*Límits infinits*) *Sigui $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció i a un punt d'acumulació de A.*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \Longleftrightarrow \forall M > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \ \ f(x) > M \ \ si \ \ 0 < |x-a| < \delta$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \Longleftrightarrow \forall M>0 \ \ \exists \delta>0: \ \ f(x) < -M \ \ si \ \ 0<|x-a|<\delta$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \Longleftrightarrow \forall M>0 \ \ \exists \delta>0: \ \ |f(x)| > M \ \ si \ \ 0<|x-a|<\delta$$

$$(\Longleftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty)$$

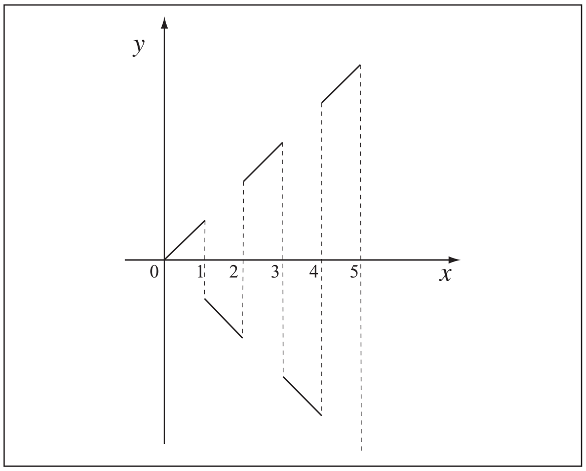


Fig. 11.10

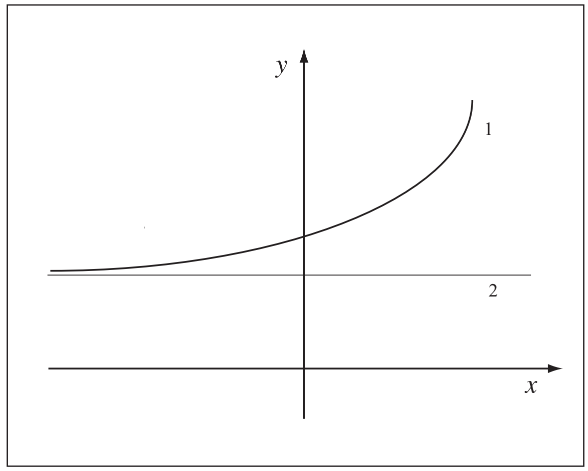


Fig. 11.11

Observem que $\to +\infty$ i $\to -\infty$ són casos particulars de $\to \infty$. Existeixen funcions tals que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ sense que es compleixi ni $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, ni $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Per exemple, la funció $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in [2n, 2n+1] \\ -x & si \quad x \in [2n+1, 2n+2] \end{cases}$$ i que podeu visualitzar a la figura 11.10.

Definició 11.6.2 (*Límits a l'infinit*) *Sigui* $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funció.*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \lambda > 0 : \forall x \in \mathbb{R}: \ x > \lambda \ \ |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \lambda < 0 : \forall x \in \mathbb{R}: \ x < \lambda \ \ |f(x) - l| < \varepsilon$$

Exemple 11.6.1 $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$. *Veure la figura 11.11.*

Propietat 11.6.1 (*Regles d'operació amb infinits*) *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *i* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, *llavors* $\lim_{x\to a} (f+g)(x) = +\infty$.

Aquest fet l'enunciarem de forma abreujada posant $l + (+\infty) = +\infty$.

Utilitzant aquest simbolisme, si $l \in \mathbb{R}$,

$$l + (\pm\infty) = \pm\infty$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$
\begin{array}{ll}
l\cdot(+\infty)=+\infty \quad (l>0) & \dfrac{l}{\pm\infty}=0 \\
l\cdot(+\infty)=-\infty \quad (l<0) & \\
l\cdot(-\infty)=-\infty \quad (l>0) & \dfrac{l}{\infty}=0 \\
l\cdot(-\infty)=+\infty \quad (l<0) & \\
l\cdot(\infty)=\infty \quad (l\neq 0) & \dfrac{l}{0}=\infty \quad (l\neq 0) \\
(+\infty)(+\infty)=+\infty & \\
(+\infty)(-\infty)=-\infty & \dfrac{\infty}{0}=\infty \\
(-\infty)(-\infty)=+\infty & \\
\infty\cdot\infty=\infty &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
l^{+\infty}=+\infty \quad (l>1)\\
l^{+\infty}=0 \quad (0<l<1)\\
0^{+\infty}=0\\
(+\infty)^{+\infty}=+\infty
\end{array}
$$

Observem que $\dfrac{l}{0}$ *i* $\dfrac{\infty}{0}$ *vol dir el límit del quocient de dues funcions tals que el límit del denominador val* 0*. Fixem-nos que en aquestes regles per calcular límits hi falten uns quants casos, per als quals no es pot donar una resposta general. Hi ha set situacions d'aquest tipus, que s'anomenen* **casos d'indeterminació** *i són*

$$
(+\infty)+(-\infty) \qquad 0\cdot\infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 1^{\infty} \qquad 0^{0} \qquad (+\infty)^{0}
$$

En aquests casos serà necessari un estudi particular de cada cas.

Les propietats que enunciarem a continuació ens poden resoldre algun d'aquests casos d'indeterminació.

Propietat 11.6.2 $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ *Si* $p(x)$ *i* $q(x)$ *són dos polinomis. Aleshores,*

1. *Si* $gr[p(x)]>gr[q(x)]$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\infty$
2. *Si* $gr[p(x)]<gr[q(x)]$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=0$
3. *Si* $gr[p(x)]=gr[q(x)]$

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^p+\cdots}{bx^p+\cdots}=\frac{a}{b}
$$

Exemple 11.6.2

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+x}{7x^5-3x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x^4}}{7-\frac{3}{x}}=\frac{2}{7}
$$

Propietat 11.6.3 $\left(\frac{0}{0}\right)$ *Si* $p(x)$ *i* $q(x)$ *són dos polinomis tals que* $p(a)=q(a)=0$*. Aleshores,*

$$
\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)r(x)}{(x-a)s(x)}=\lim_{x\to a}\frac{r(x)}{s(x)}
$$

Exemple 11.6.3 *Calculeu*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2+x-6}$$

Si avaluem directament aquest límit tenim que

$$\frac{2^3-3\cdot 2^2+4}{2^2+2-6}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2} \frac{x(x-1)}{x+3}=\frac{2}{5}$$

Moltes indeterminacions del tipus $\frac{0}{0}$ es resolen aplicant infinitèsims equivalents (vegeu les referències [21] i [26]).

El cas $\dfrac{0}{0}$, i també els casos $0\cdot\infty$ i $\infty-\infty$, es pot resoldre, si es compleixen les hipòtesis del teorema, amb la regla de l'Hôpital (vegeu capítol 13).

El cas d'indeterminació del tipus $\dfrac{\infty}{\infty}$ que prové del quocient de dues funcions es sol resoldre aplicant l'ordre d'infinits (vegeu referència [26]).

Propietat 11.6.4 (*Ordre d'infinits*)

$$(\ln x^p)^q \ll x^b \ll e^{kx} \ll x^{rx}$$

on $f(x)\ll g(x)$ *vol dir* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ *i* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}=+\infty$

Exemple 11.6.4

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}=+\infty$$

El cas $\infty-\infty$ es resol moltes vegades multiplicant i dividint per la suma del terme que provoca la indeterminació (la diferència).

Exemple 11.6.5

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-(x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=0$$

11.7 Continuïtat

El concepte de continuïtat és una de les propietats més importants de les funcions. Entendrem que una funció contínua és aquella que no presenta "talls" en la seva representació gràfica.

Definició 11.7.1 (*Continuïtat en un punt*) *La funció f és* **contínua en a** *si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Exemple 11.7.1

La funció $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ no és contínua en 0, ja que ni tan sols hi està definida, i el mateix passa amb la funció $g(x) = x\sin\frac{1}{x}$. Podem estendre aquesta funció g a tot $\mathbb{R}$ definint una nova funció

$$G(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Si volem que G sigui contínua hem d'imposar

$$a = \lim_{x\to 0} g(x)$$

per tant,

$$a = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

Observem que no podem fer el mateix amb la funció f perquè $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ no existeix.

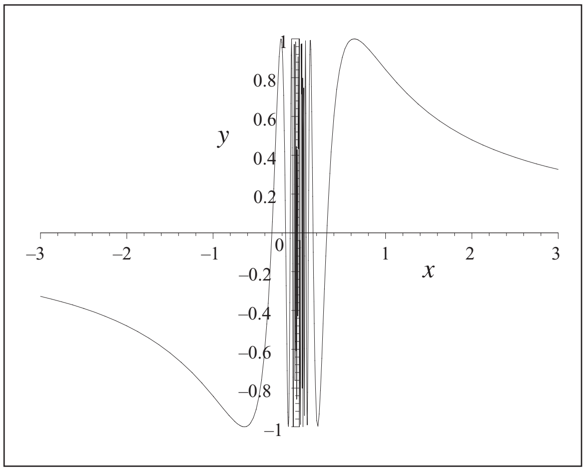


Fig. 11.12 Gràfic de $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$

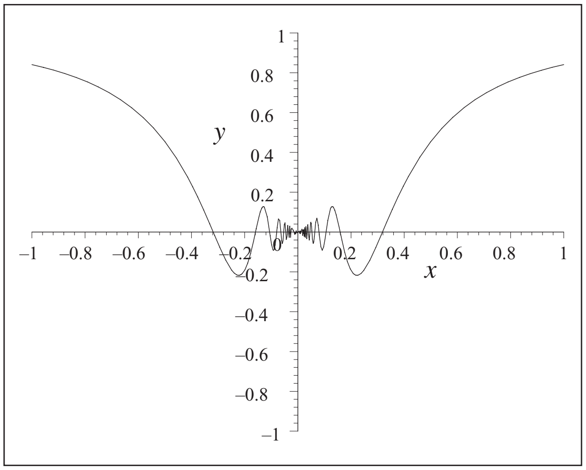


Fig. 11.13 Gràfic de $g(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$

Definició 11.7.2 (*Discontinuïtats*) *Sigui $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $a \in A \cap A'$. Direm que f és* **discontínua** *en a si f no és contínua en a. Observem que això pot ser degut a alguna de les circumstàncies següents:*

1. *Existeix el límit però no és $f(a)$ (discontinuïtat* **evitable***)*
2. *No existeix el límit. Això pot ser degut al fet que,*

(a) existeixen els límits laterals però són diferents (discontinuïtat de **salt***)*

(b) almenys un dels límits laterals no existeix (discontinuïtat **essencial***)*

Propietat 11.7.1 *Si les funcions f i g són contínues en a, aleshores,*

- *$f+g$ és contínua en a.*
- *fg és contínua en a.*
- *$\dfrac{f}{g}$ és contínua en a si $g(a) \neq 0$.*

Propietat 11.7.2 *Si g és contínua en a, i f és contínua en $g(a)$, llavors $f \circ g$ és contínua en a.*

Definició 11.7.3 *(Continuïtat en un conjunt) Direm que f* **és contínua en un conjunt** *A, si f és contínua en tot punt d'aquest conjunt.*

Propietat 11.7.3 *Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ i si f és contínua en l, aleshores,*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(l)$$

És a dir,

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

Dit altrament, el límit i la funció commuten sempre que el límit de la primera funció existeixi i la segona funció sigui contínua en aquest límit.

Aquesta darrera propietat pot utilitzar-se per resoldre alguns casos d'indeterminació.

Aplicació al cas 0^0, ∞^0

Si estudiem un límit del tipus

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \quad \text{essent} \quad \lim_{x\to a} f(x) = 0 \ \text{ o bé } \ \infty \ \text{ i } \ \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

utilitzant les propietats de la funció exponencial i logarítmica podem dir que

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\ln \lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to a} \ln f(x)^{g(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$$

Per tant, si $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x) = l$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{l}$$

Exemple 11.7.2 *Calculeu $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$*

Aquest límit és del tipus 0^0. Calculem $l = \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

En el segon pas hem aplicat la regla de l'Hôpital, que s'explica amb detall més endavant, al capítol 13.

Per tant, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$.

Aplicació al cas 1^∞

Si $f(x)$ és una funció no nul·la tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, llavors es compleix que

$$\lim_{x\to a} (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$$

Si suposem ara que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, utilitzant les identitats

$$h(x)^{g(x)} = (1+(h(x)-1))^{g(x)} = \left[(1+(h(x)-1))^{\frac{1}{h(x)-1}}\right]^{(h(x)-1)g(x)}$$

tindrem que

$$\lim_{x\to a} h(x)^{g(x)} = e^\lambda \quad \text{on} \quad \lambda = \lim_{x\to a} (h(x)-1)g(x)$$

sempre que aquest darrer límit existeixi.

Exemple 11.7.3 *Calculeu* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{3x}$

Aquest límit és del tipus 1^∞

Calculem

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x} - 1\right) 3x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) 3x = 3$$

Per tant,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{3x} = e^3$$

Aquests límits els podem obtenir amb eines de compilació remota, com ara MAPLE

```
> limit(((x+1)/x)^(3*x),x=infinity);
```

$$e^3$$

o bé WIRIS

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{3x} \Rightarrow e^{3}$$

Per consolidar els conceptes d'aquest capítol podeu anar a la pàgina
`http://www.wiris.net/upc.edu/collection`

12 Derivades de les funcions elementals

Aquest capítol es dedica fonamentalment a l'estudi de la derivada d'una funció, concepte bàsic del càlcul diferencial.

El 1682 va aparèixer la primera gran revista científica internacional, l'*Acta Eruditorum*, on Leibniz va publicar un darrere l'altre els resultats que constitueixen els fonaments del càlcul infinitesimal. L'*Acta* de 1684 conté el que es considera com el primer tractat sobre càlcul diferencial, amb un títol que deia aproximadament *Un nou mètode per a màxims, mínims i tangents que també serveix per a valors fraccionaris i irracionals i que per tant constitueix un tipus de càlcul sense precedents*. Allà va aparèixer per primera vegada imprès el símbol d i enunciades les regles de diferenciació de la suma, diferència, producte, quocient, regla de la cadena, la derivada segona, la resolució d'equacions diferencials per separació de variables i les condicions $dv = 0$ per al càlcul de valors extrems i $ddv = 0$ pel que fa als punts d'inflexió.

L'any 1676 Newton va escriure el *Quadratura curvarum*, que va ser publicat el 1704 i on intenta acabar amb la notació d'infinitament petit, introduint el *mètode de les raons primeres i últimes*, que correspon a la formació de la derivada com a

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

i representa l'última i definitiva concepció de Newton pel que fa al càlcul infinitesimal.

Fins a principis del segle XIX, no es va concloure la fonamentació del càlcul, superant els problemes de rigor, sobretot pel que fa referència al concepte de quantitats infinitament petites.

12.1 Definicions bàsiques

Definició 12.1.1 (*Derivabilitat d'una funció en un punt*) *Sigui $f : I \to \mathbb{R}$ funció definida en un interval obert I i considerem un punt $a \in I$. Direm que f* **és derivable en** *a si existeix el límit,*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

i en cas que existeixi i sigui finit s'anomena derivada de f en a. També s'utilitza la notació $Df(a)$ o bé, en assignatures més tècniques, $\dot{f}(a)$.

Definició 12.1.2 (*Derivabilitat en un conjunt*) *Direm que una funció $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és derivable a $I \subset A$ si f és derivable en tot punt del conjunt I. Aquest conjunt s'anomena domini de derivabilitat de f i habitualment és un interval obert $(a,b) \subset \mathbb{R}$.*

Definició 12.1.3 (*Funció derivada*) *Si* $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és derivable* $\forall x \in I$*, s'anomena* **funció derivada** *de* f *l'aplicació*

$$\begin{array}{rcl} f': & I & \to \mathbb{R} \\ & x & \to f'(x) \end{array}$$

Exemple 12.1.1 *Estudieu la derivabilitat de la funció* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida per*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x^3 + 4x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en el punt x=0.

Si existeix $f'(0)$ serà el valor del $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Com que el valor de $f(x)$ depèn de si $x > 0$ o $x < 0$, per calcular el límit hem de considerar els límits laterals (recordem que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ (límit lateral per la dreta) vol dir considerar $x > a$ i $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ (límit lateral per l'esquerra) vol dir considerar valors x tals que $x > a$.

El límit existirà en cas que existeixin els dos límits laterals i coincideixin.

Calculem, doncs, els límits laterals del nostre exemple

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x^3 + 4x^2}{x} = \lim_{x \to 0^+} (2x^2 + 4x) = 0$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{0}{x} = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$$

Per tant, f és derivable a $x = 0$ i $f'(0) = 0$.

Exemple 12.1.2 *Estudieu la derivabilitat de la funció valor absolut a l'origen de coordenades.*

Recordem que $|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ està definida per $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Aquesta funció és derivable a $x = 0$ si existeix

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Calculem, doncs, els límits laterals

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \tfrac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \tfrac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

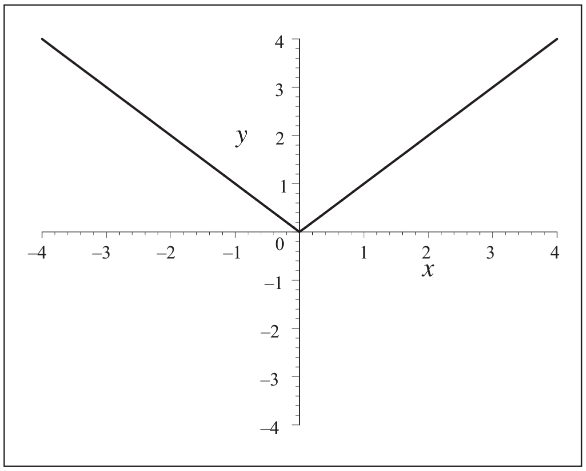


Fig. 12.1 Representació gràfica de $f(x) = |x|$

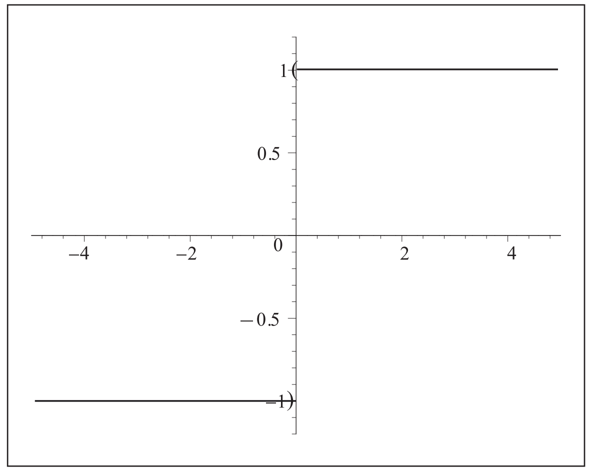


Fig. 12.2 Representació gràfica de $f'(x)$

Com que els límits laterals no coincideixen, podem afirmar que el límit $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0}$ no existeix i, per tant, la funció valor absolut no és derivable a l'origen de coordenades.

12.2 Interpretació geomètrica de la derivada

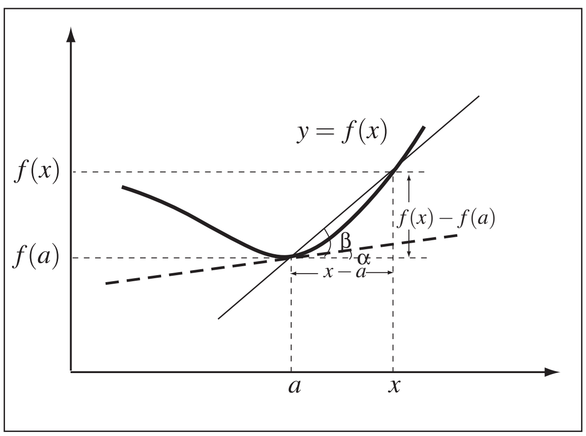


Fig. 12.3 Interpretació geomètrica de la derivada

És important saber interpretar el concepte de derivada des del punt de vista geomètric o tècnic. En aquest cas, fins i tot històricament, es parteix de la interpretació física (velocitat instantània) per arribar a la definició rigorosa d'aquest concepte.

Definició 12.2.1 (*Recta tangent*) *Considerem*

$$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

una funció definida en un interval I. Si f és derivable en un punt $a \in I$, aleshores s'anomena **tangent** *la corba $y = f(x)$ en el punt $P = (a, f(a))$ a la recta que passa pel punt P i té pendent $f'(a)$, és a dir, la recta d'equació:*

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Fixem-nos que $\tan\beta = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Si el valor x s'apropa al punt a, aleshores fent servir la definició de derivada en un punt

$$\lim_{x\to a} \tan\beta = \tan\alpha = f'(a)$$

Així, doncs, la derivada en un punt és el valor del pendent de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en $(a, f(a))$.

12.3 Propietats algebraiques

Propietat 12.3.1 *Siguin f, g dues funcions reals definides en un interval I. Si f i g són deri- vables en un punt $x \in I$, aleshores també són derivables en x les funcions kf ($\forall k \in \mathbb{R}$), $f+g$, fg i $\dfrac{f}{g}$ (si $g(x) \neq 0$), i les seves derivades són:*

1. $(kf)'(x) = kf'(x)$
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ (si $g(x) \neq 0$)

Aquestes normes de derivació es poden escriure amb la notació de Leibniz, notació que és tot sovint emprada en l'àmbit de l'enginyeria.

1. linealitat: $\dfrac{d}{dx}(af+bg) = a\dfrac{df}{dx} + b\dfrac{dg}{dx}$
2. producte: $\dfrac{d}{dx}(fg) = f\dfrac{dg}{dx} + g\dfrac{df}{dx}$
3. quocient: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\dfrac{df}{dx} - f\dfrac{dg}{dx}}{g^2}$

Fixeu-vos que en la propietat de linealitat hem resumit les dues primeres propietats anteriors.

Propietat 12.3.2 (*Regla de la cadena*) *Considerem $f : I \to \mathbb{R}$ i $g : J \to \mathbb{R}$ dues funcions, definides en els intervals I i J tals que $f(I) \subset J$. Si f és derivable en un punt $a \in I$ i si g és derivable en un punt $f(a) \in J$, aleshores la funció composta $g \circ f$ és derivable en a i la seva derivada és:*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Exemple 12.3.1 *Calculeu la derivada en el punt $a = 3$ de la funció $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per $h(x) = g(x^3 + 2x)$ essent $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció derivable en tot $\mathbb{R}$, tal que $g'(33) = \frac{1}{5}$.*
Per definició $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ essent $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = x^3 + 2x$. Per tant, per calcular la seva derivada apliquem la regla de la cadena.

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = g'(x^3 + 2x) \cdot (3x^2 + 2)$$

Avaluant en $x = 3$ tenim:

$$h'(3) = g'(33) \cdot 29 = \frac{1}{5} \cdot 29 = \frac{29}{5}$$

La notació de Leibniz es fa servir, sobretot, quan s'aplica la regla de la cadena.

Observació: (Regla de la cadena amb la notació de Leibniz) Si $y = f(u)$ és una funció derivable de u i $u = g(x)$ és una funció derivable de x, aleshores $y = f(g(x))$ és una funció derivable de x i s'escriu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Exemple 12.3.2 *Un objecte circular està augmentant de mida de manera no especificada, però sabem que quan el radi és* 5 m*, el radi augmenta a raó de* 3 cm/seg*. Trobeu la velocitat de variació de l'àrea d'aquest objecte quan el radi és* 5 m.

Si $r(t)$ i $A(t)$ representen el radi i l'àrea a l'instant t, llavors, pel fet que es tracta d'un objecte circular, es compleix $A(t) = \pi r(t)^2$. Per calcular la velocitat de variació de l'àrea, aplicarem la regla de la cadena

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{dA(t)}{dr}\frac{dr(t)}{dt} = 2\pi r(t)\frac{dr(t)}{dt}$$

Com que $\dfrac{dr(t)}{dt} = 0{,}03$ quan $r(t) = 5$, deduïm que

$$\frac{dA(t)}{dt} = 2\pi \cdot 5 \cdot 0{,}03 = 0{,}3\pi \text{ m}^2/\text{seg}$$

12.4 Derivades de funcions elementals

A continuació s'escriu una relació de fórmules per calcular les derivades de diferents funcions: polinòmiques, exponencials, logarítmiques i trigonomètriques. El coneixement d'aquestes fórmules és necesari, però en cap cas suficient per aplicar correctament el concepte de derivada. La idea de la derivada és molt més que aquestes regles de càlcul. A més a més de saber calcular derivades s'ha d'entendre el concepte de la derivada si es volen aplicar les matemàtiques correctament a l'Enginyeria. La derivada és una de les idees fonamentals del Càlcul.

Funció	Derivada
$f(x)^n$	$nf(x)^{n-1}f'(x)$
$\sqrt[n]{f(x)}$	$\dfrac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
	Funcions exponencials i logarítmiques
$\log_a f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$
$\ln f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)}f'(x)\ln a$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}f'(x)$
$f(x)^{g(x)}$	$\left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right] f(x)^{g(x)}$
	Funcions trigonomètriques
$\sin f(x)$	$f'(x)\cos f(x)$
$\cos f(x)$	$-f'(x)\sin f(x)$
$\tan f(x)$	$[1+\tan^2 f(x)]f'(x) = f'(x)\sec^2 f(x)$

Funció	Derivada	
	Funcions trigonomètriques	
$\cot f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$	
$\sec f(x)$	$\sec f(x) \tan f(x) f'(x)$	
$\operatorname{cosec} f(x)$	$-\operatorname{cosec} f(x) \cot f(x) f'(x)$	
	Funcions trigonomètriques inverses	
$\arcsin f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$	$[-\frac{\pi}{2} < \arcsin f(x) < \frac{\pi}{2}]$
$\arccos f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$	$[0 < \arccos f(x) < \pi]$
$\arctan f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$	$[-\frac{\pi}{2} < \arctan f(x) < \frac{\pi}{2}]$
$\operatorname{arccot} f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$	$[0 < \operatorname{arccot} f(x) < \pi]$
	Funcions hiperbòliques	
$\sinh f(x)$	$\cosh f(x) f'(x)$	
$\cosh f(x)$	$\sinh f(x) f'(x)$	
$\tanh f(x)$	$\operatorname{sech}^2 f(x) f'(x)$	
$\coth f(x)$	$-\operatorname{cosech}^2 f(x) f'(x)$	
	Funcions hiperbòliques inverses	
$\arg \sinh f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}$	
$\arg \cosh f(x)$	$\pm\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}}$	$\begin{cases} + \text{ si } \arg \cosh f(x) > 0,\ f(x) > 1 \\ - \text{ si } \arg \cosh f(x) < 0,\ f(x) > 1 \end{cases}$
$\arg \tanh f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1-f^2(x)}$	amb $\lvert f(x) \rvert < 1$
$\arg \coth f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1-f^2(x)}$	amb $\lvert f(x) \rvert > 1$

Exemple 12.4.1 *Trobeu la tangent de la corba d'equació $y = x^{\sin x}$ en el punt $x = \frac{\pi}{2}$.*

Com que $y'(x_0)$ és el valor del pendent de la recta tangent a $y = y(x)$ en $x = x_0$, l'equació de la recta tangent que busquem és:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \text{ essent } x_0 = \frac{\pi}{2},\ y_0 = \frac{\pi}{2}$$

Quan hem de derivar funcions del tipus $y = f(x)^{g(x)}$ és molt útil aplicar logaritmes i la regla de la cadena.

$$y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x)\ln f(x)$$

Derivem respecte de x i obtenim:

$$\frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$$

d'on

$$y' = f(x)^{g(x)}[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}]$$

A aquest mètode se l'anomena **derivació logarítmica.**

En el nostre cas particular, doncs, per calcular la derivada de $y = x^{\sin x}$ primer de tot apliquem el logaritme neperià de les expressions als dos costats de la igualtat.

$$\ln y = \sin x \ln x$$

Derivem l'expressió:

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \sin x \frac{1}{x}$$

Obtenim finalment l'expressió de la derivada de y:

$$y'(x) = [\cos x \ln x + \sin x \frac{1}{x}]x^{\sin x}$$

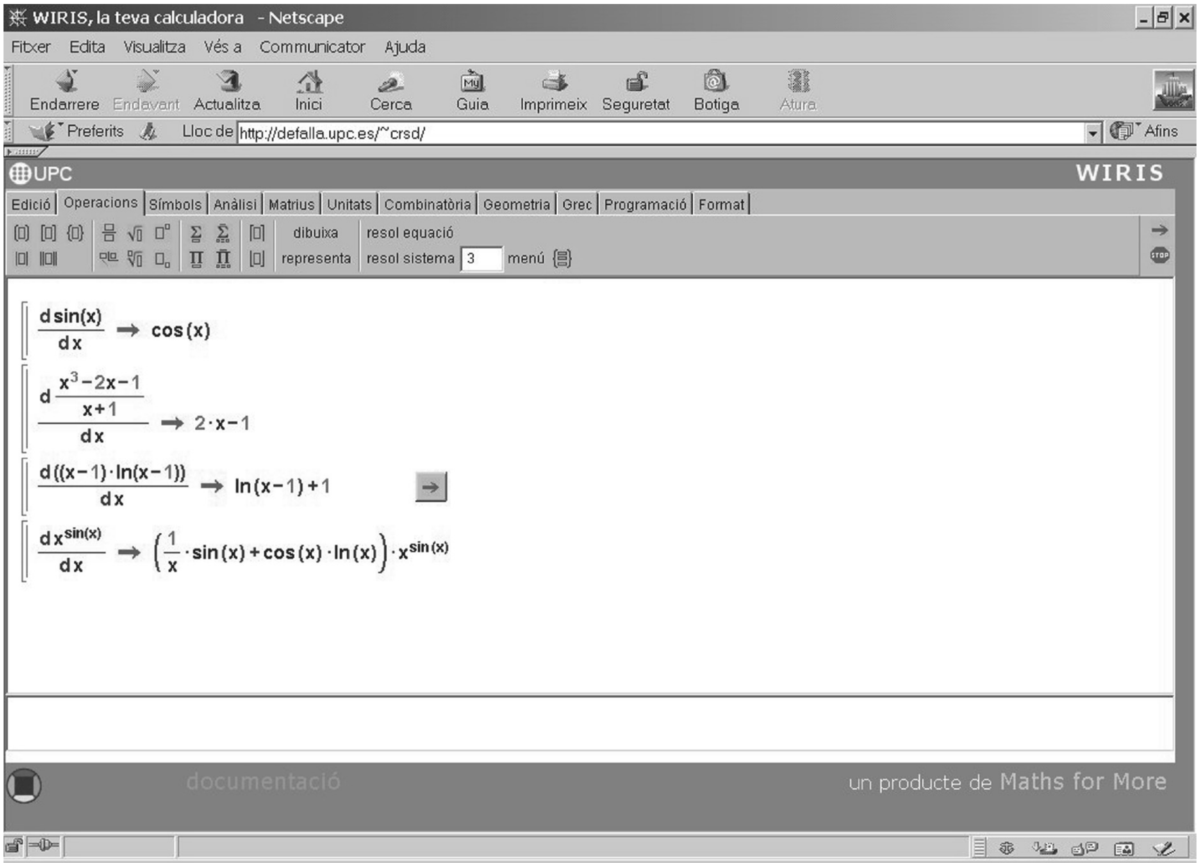
Avaluant en $x = \pi/2:\ \ y'(\pi/2) = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} = 1$

Per tant, la tangent és:

$$y - \frac{\pi}{2} = 1(x - \frac{\pi}{2}) \Longrightarrow y = x$$

Per calcular derivades es poden fer servir sistemes de càlcul com per exemple WIRIS.

Aquests sistemes de càlcul no fan l'estudi de derivabilitat d'una funció, i és en aquests casos on s'ha de tenir molt clara la definició de derivabilitat d'una funció en un punt.



Exemple 12.4.2 *Estudieu la derivabilitat de la funció real de variable real*

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)\ln|x-1| & \textit{si } x\neq 1\\ 0 & \textit{si } x=1\end{cases}$$

Desdoblem la funció tenint en compte la definició de valor absolut

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)\ln(1-x) & \text{si } x<1\\ 0 & \text{si } x=1\\ (x-1)\ln(x-1) & \text{si } x>1\end{cases}$$

Si $x\neq 1$ f és derivable (propietats 12.3.1 i 12.3.2) i

$$f'(x)=\begin{cases}\ln(1-x)+1 & \text{si } x<1\\ \ln(x-1)+1 & \text{si } x>1\end{cases}$$

Si $x=1$ s'ha d'estudiar la derivabilitat de la funció aplicant la definició

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\ln(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\ln(x-1)=-\infty$$

per tant, el límit no existeix i llavors f no és derivable a $x=1$.

Així, doncs, f és derivable a $\mathbb{R}-\{1\}$.

Com ja hem comentat abans, avui dia hi ha eines informàtiques de càlcul que resolen diferents conceptes matemàtics. Anem a veure uns quants exemples d'obtenció de derivades de funcions amb el MAPLE.

Exemple 12.4.3 *Volem calcular la derivada de la funció* $f(x)=x^3+2x^2-5x+13$.

```
> diff(x^3+2*x^2-5*x+13,x);
```

$$3x^2+4x-5$$

Exemple 12.4.4 *Volem calcular la derivada de la funció* $g(t)=t\ln t$.

```
> diff(t*ln(t),t);
```

$$\ln(t)+1$$

Exemple 12.4.5 *Volem calcular la derivada de la funció* $y=\dfrac{x^2-x+5}{x-4}$.

Ara no derivem l'expressió directament: primer definim la funció y, després la derivem i finalment la simplifiquem.

```
> y:=((x^2-x+5)/(x-4));
```

$$y:=\frac{x^2-x+5}{x-4}$$

```
> diff(y,x);
```

$$\frac{2x-1}{x-4}-\frac{x^2-x+5}{(x-4)^2}$$

```
> simplify(diff(y,x));
```

$$\frac{x^2-8x-1}{(x-4)^2}$$

Observem que al calcular la derivada de la funció

$$f(x)=\frac{x^3-2x-1}{x+1}$$

WIRIS dóna el resultat amb la seva expressió més simplificada possible

$$\frac{d\left(\frac{x^3-2x-1}{x+1}\right)}{dx} \rightarrow 2\cdot x-1$$

Si volem calcular aquesta mateixa derivada amb MAPLE, el que ens trobem és

```
> diff((x^3-2*x-1)/(x+1),x);
```

$$\frac{3x^2-2}{x+1}-\frac{x^3-2x-1}{(x+1)^2}$$

```
> simplify((3*x^2-2)/(x+1)-(x^3-2*x-1)/(x+1)^2);
```

$$2x-1$$

12.5 Derivades successives

Si apliquem la noció de derivabilitat a la funció f', obtindrem una nova funció $(f')'$ que s'anomena **derivada segona** de f, el domini de la qual consta dels punts a on f' és derivable. En lloc de $(f')'$ farem servir la notació f'' i s'anomena *derivada segona* de f. Si $f''(a)$ existeix, direm que f és dues vegades derivable en a, i el nombre de $f''(a)$ s'anomena *derivada segona de f en a*. De la mateixa forma podem definir les derivades d'ordre superior:

$$f^{(k+1)}=(f^{(k)})' \quad k\geq 1$$

Notació: $f^{(0)}=f$

La derivada f', d'una funció donada f, també es pot escriure amb la notació de Leibniz:

$$\frac{df(x)}{dx}$$

i vol dir que derivem la funció f respecte de la variable x. Així, doncs, $f'(a)$ es pot escriure com a

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$$

La notació de Leibniz per a les derivades successives, per exemple, $f''(x)$, és

$$\frac{d(\frac{df(x)}{dx})}{dx}$$

que s'abreuja a $\dfrac{d^2f(x)}{(dx)^2}$, o més freqüentment a $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$.

Els símbols $f'(x)$ per a la primera derivada, $f''(x)$ per a la segona derivada, etc., van ser introduïts per Joseph Louis Lagrange (1736-1813). El 1797 a *Théorie des fonctions analytiques* apareixen els símbols $f'x$ i $f''x$; i a *Oeuvres*, Vol. X, "que pretén ser una reimpressió de l'edició del 1806, s'hi poden trobar les corresponents expressions donades com a $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$".

El 1770 Joseph Louis Lagrange (1736-1813) va escriure ψ' en lloc de $\frac{d\psi}{dx}$ a la seva memòria *Nouvelle Méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries*. Aquesta notació també la trobem a la memòria de François Daviet de Foncenex el 1759,que es creu actualment que va ser escrita per Lagrange.

El 1772 Lagrange va escriure $u' = \dfrac{du}{dx}$ i $du = u'dx$ a *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif a la différentiation et á l'integration des quantités variables*, de *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*.

12.6 Interpretació cinemàtica

Per acabar aquest capítol, es comenta la interpretació física de la derivada i la derivada segona d'una funció particular. Considerem una partícula que es mou al llarg d'una línia recta en la qual hem triat un punt "origen". Denotem per $s(t)$ la distància a la partícula des de l'origen en l'instant de temps t (és a dir, la seva posició). Aleshores definim la *velocitat* (instantània) de la partícula en l'instant t com $s'(t)$. Observem que $s'(t)$ pot ser negativa. El valor absolut $|s'(t)|$ a vegades s'anomena *rapidesa* (instantània). Anomenem *acceleració* de la partícula en l'instant t a $s''(t)$. L'acceleració és una magnitut important en la descripció cinemàtica del sistema, ja que, tal com s'estableix en les lleis del moviment de Newton, la força que actua sobre la partícula és el producte de la seva massa per la seva acceleració.

Per consolidar els concepte de derivada podeu treballar amb la pàgina
`http://www.wiris.net/upc.edu/collection`

13 Aplicacions de la derivada

El concepte de funció derivada és una eina fonamental en les enginyeries. Podem trobar la derivada dins de moltíssimes expressions que expliquen comportaments físics que s'estudien, de vegades en expressions molt complexes, però també en altres relacions molt senzilles entre variables, establertes unes hipòtesis significatives.

N'és un clar exemple el càlcul del cabal d'aigua que s'infiltra pel sòl entre dos embassaments com els de la figura 13.1, suposant que el flux d'aigua és unidireccional (seguint la direcció de l'eix de les x) i el fons és impermeable (no s'infiltra aigua cap avall). Podem trobar el cabal d'aigua a partir de la variació de l'energia de l'aigua per unitat de pes en cada punt, i per tant mitjançant una expressió que conté la seva derivada.

$$Q = -kA\frac{dh}{dx}$$

On

- Q és el cabal d'aigua expressat en $\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$
- A l'àrea de la secció estudiada expressada en m^2
- h l'energia de l'aigua del terreny per unitat de pes expressada en m
- k la permeabilitat del sòl expressada en $\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

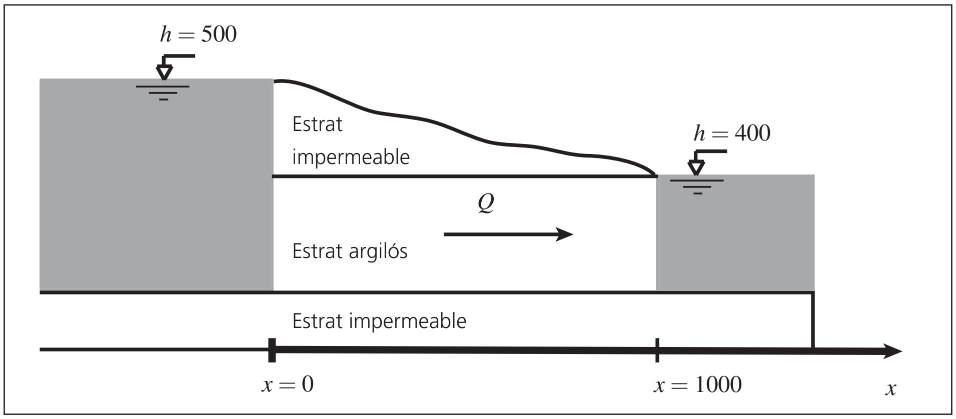


Fig. 13.1

Suposant que tenim

- un estrat llimós per on es filtra l'aigua de $20\ \mathrm{m}$ de profunditat amb permeabilitat $k = 10^{-3}\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} = 10^{-5}\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- un estrat impermeable (no pot passar aigua) sota l'estrat llimós
- els embassaments tenen una amplada de $100\ \mathrm{m}$, estan a cota $500\ \mathrm{m}$ i $400\ \mathrm{m}$ respectivament i disten $1\ \mathrm{km}$
- la pèrdua d'energia és lineal amb la distància

Com que la pèrdua d'energia és lineal, podem establir la següent llei d'energies:

$$h(x) = \frac{400\ \mathrm{m} - 500\ \mathrm{m}}{1000\ \mathrm{m}} x + 500 = -0{,}1x + 500$$

Per tant,

$$\frac{dh}{dx} = -0{,}1$$

Aplicant la fórmula presentada, el cabal val

$$Q = Q_x = -10^{-5}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 100\ \mathrm{m} \cdot 20\ \mathrm{m} \cdot (-0{,}1) = 2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} = 172\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{dia}}$$

Per tant, tenim una pèrdua del primer embassament cap al segon de $172\ \dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{dia}}$

13.1 Regla de l'Hôpital

El matemàtic francès Guillaume F. A. de l'Hôpital (1661-1704), marquès de l'Hôpital, va publicar una fórmula coneguda com la regla a finals del segle XVII. De fet, aquesta regla es diu que va ser descoberta pel mestre de l'Hôpital, Johann Bernoulli (1667-1748).

Teorema 13.1.1 (*Regla de l'Hôpital*) *Siguin f i g dues funcions derivables en (a,b), on $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ i amb $g'(x) \neq 0$ en un entorn de a.*

1. *Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, on l pot ser un nombre real, $-\infty$* o bé *$+\infty$, aleshores*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

2. *Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, on l pot ser un nombre real, $-\infty$* o bé *$+\infty$, aleshores*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Un enunciat anàleg és cert en el punt b.

Exemple 13.1.1 *Calculeu*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}}$$

Com que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

aplicant la regla de l'Hôpital, deduïm que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

Observació: L'existència de $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ no implica l'existència de $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Exemple 13.1.2 *Calculeu*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{x-\cos x}$$

Aquest límit és de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ *per tant calculem el límit del quocient de derivades*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\cos x}{1+\sin x}$$

Però aquest límit no existeix perquè $\sin x$ *i* $\cos x$ *oscil·len entre -1 i 1 quan* $x \to +\infty$*. El fet que aquest límit no existeixi no vol dir que no existeixi el valor del límit que nosaltres volem calcular inicialment, simplement que en aquest cas no podem aplicar la regla de l'Hôpital.*

Per calcular

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{x-\cos x}$$

multiplicant per $\frac{1}{x}$ *numerador i denominador:*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{x-\cos x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

Propietat 13.1.1 (*Aplicacions de la regla de l'Hôpital al càlcul de límits indeterminats*) *Siguin* $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dues funcions derivables en un entorn d'un punt* $a \in A$*,*

1. *Si* $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0\cdot\infty$*, podem escriure*

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \left(= \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \right)$$

per tant,

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$$

i ara podem aplicar la regla de l'Hôpital.

(*El fet de tenir* $\dfrac{0}{0}$ *o bé* $\dfrac{\infty}{\infty}$ *depèn de cada cas particular.*)

2. *Si* $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \infty-\infty$, *podem escriure*

$$f(x)-g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

per tant,

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a}\left(\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}\right) = \frac{0}{0}$$

i aplicar la regla de l'Hôpital.

Exemple 13.1.3 *Calculeu* $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Com que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

aplicant la regla de l'Hôpital deduïm que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Per tant,

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$

Exemple 13.1.4 *Calculeu* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0$$

En aquest exemple hem aplicat dues vegades la regla de l'Hôpital. Sempre que es compleixin les hipòtesi necessàries podem aplicar la regla reiteradament.

13.2 Fórmules de Taylor i MacLaurin

Entre els seguidors de Newton a Anglaterra cal anomenar MacLaurin (1698-1746) i Brook Taylor (1685-1731) als quals es deuen els desenvolupaments que porten llurs noms. La idea principal és que localment, tota funció derivable "s'assembla" a un polinomi.

Una tècnica important en l'estudi de les funcions és l'aproximació per polinomis, ja que els polinomis són les funcions més senzilles que hi ha. Aquest és l'objectiu de la fórmula de Taylor.

Teorema 13.2.1 (*Polinomi de Taylor*) *Sigui f una funció $n-1$ vegades derivable en un interval obert I tal que $f^{(n-1)}$ sigui derivable en $x=a$. Llavors el polinomi*

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

s'anomena **polinomi de Taylor** *de f en a i de grau n.*

El polinomi de Taylor és l'únic polinomi de grau n tal que el seu valor i el de les seves derivades coincideixen amb les de f en a. Per tant, com més gran és el valor de n més bona és l'aproximació de f a les proximitats de a.

Teorema 13.2.2 (*Fórmula de Taylor*) *Sigui f una funció $n+1$ vegades derivable en un interval obert I. Aleshores si $a \in I$ es compleix que*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x,a)$$

on $R_n(x,a)$ és una funció que depèn de x i de a i s'anomena **residu de Taylor** *o* **terme complementari**.

L'expressió de Lagrange del terme complementari és:

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

essent c un punt de l'interior de l'interval determinat per a x i a.

Fixem-nos que

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

per tant,

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

és l'error comès en fer l'aproximació polinòmica.

El desenvolupament de MacLaurin és un cas particular de la fórmula de Taylor, quan $a=0$.

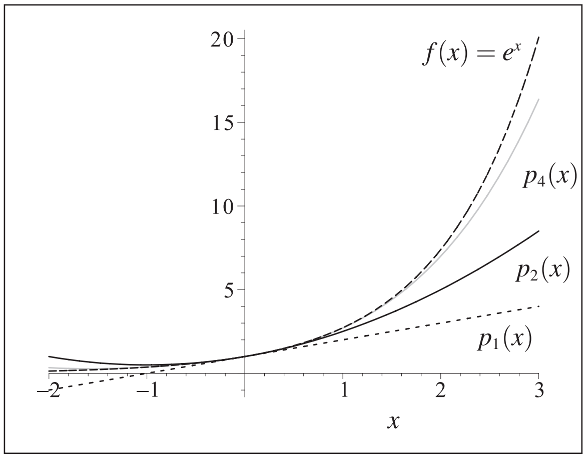


Fig. 13.2 Gràfic de les funcions $f(x)=e^x$, $p_1(x)=1+x$, $p_2(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}$, $p_4(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}$

Exemple 13.2.1 *Calculeu el polinomi de Taylor de la funció exponencial $f(x)=e^x$ de grau n per a $a=0$*

$$p_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Com que $f(0)=e^0=1$ i $f^{(n)}(x)=e^x\quad(\forall n\in\mathbb{N})$, $f^{(n)}(0)=1\ \forall n\in N$, per tant,

$$p_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

Observem que a l'augmentar el grau del polinomi de Taylor hi ha una millor aproximació de la funció pel polinomi al voltant del punt $a=0$. Fixem-nos també que el desenvolupament de Taylor dóna una aproximació local, és a dir, per a valors de x força diferents de 0 aquest polinomi no és una bona aproximació de la funció exponencial.

13.3 Aplicació al càlcul d'extrems

Definició 13.3.1 (*Extrems absoluts*) *Sigui $f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ essent A el domini de f i considerem $a\in A$. Direm que*

$M=f(a)$ *és el valor* **màxim absolut** *de f en A si $f(a)\geq f(x)\ \ \forall x\in A$*

$m=f(a)$ *és el valor* **mínim absolut** *de f en A si $f(a)\leq f(x)\ \ \forall x\in A$*

S'anomena **extrem absolut** *a un màxim o un mínim absolut.*

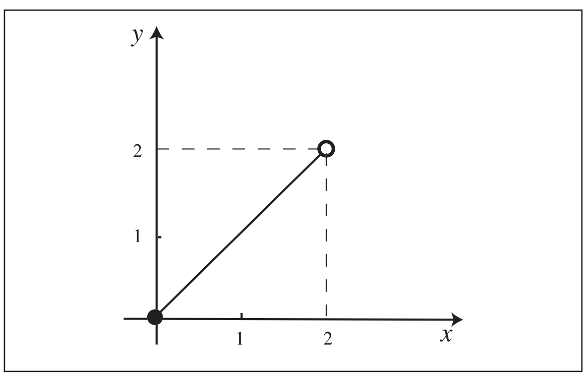


Fig. 13.3

Teorema 13.3.1 (*Teorema de Weierstrass*) *Tota funció contínua, definida en un interval tancat i fitat, assoleix en ell un màxim i un mínim absolut.*
Considerem per exemple la funció $f:[0,2)\to\mathbb{R}$ definida per $f(x)=x$.

Observem que f és contínua però que no té màxim. Això no contradiu el teroema de Weierstrass, el que passa és que falla una hipòtesi: l'interval $[0,2)$ no és tancat.

Definició 13.3.2 (*Extrems relatius o locals*) *Sigui $f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.*

Direm que f té un **màxim relatiu** *en un punt $a\in A$ si $f(x)\leq f(a)$ per a qualsevol x d'un interval obert que contingui a.*

Direm que f té un **mínim relatiu** *en un punt $a\in A$ si $f(x)\geq f(a)$ per a qualsevol x d'un interval obert que contingui a.*

Als valors màxims i mínims relatius se'ls anomena conjuntament **extrems relatius***.*

Definició 13.3.3 (*Punts crítics*) *Si $f : A \subset \mathbb{R} \to$ està definida en $a \in A$ i $f'(a) = 0$ o bé no existeix $f'(a)$, direm que el punt a és un* **punt crític** *del domini de f.*

Teorema 13.3.2 *Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció contínua en un domini A que conté un interval obert, i sigui a un punt d'aquest interval. Aleshores, si $f(a)$ és un extrem relatiu, a ha de ser punt crític del domini.*

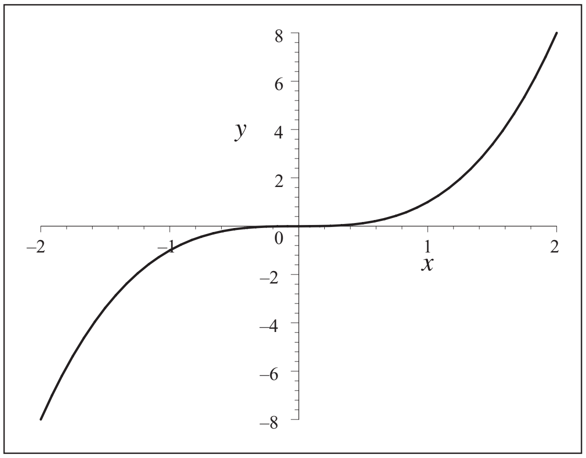


Fig. 13.4 Gràfic de la funció $f(x) = x^3$

És a dir, si la imatge de a és un extrem relatiu d'una funció, aleshores en a la derivada val zero o bé no existeix.

Observem que el teorema 13.3.2 diu que tot extrem relatiu s'assoleix en un punt crític, però no diu que tot punt crític provoqui un extrem relatiu.

Exemple 13.3.1

Considerem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = x^3$.

La funció f és derivable $\forall x \in \mathbb{R}$ i $f'(x) = 3x^2$.

Fixem-nos que $f'(0) = 0$ però que per $a = 0$ f no té extrem relatiu. Veure la figura 13.4.

Propietat 13.3.1 (*Càlcul dels extrems absoluts*) *Mètode per calcular els extrems absoluts d'una funció $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua:*

1. *Trobeu els punts crítics de f a $[a,b]$.*
2. *Calculeu la imatge per f de tots els punts crítics.*
3. *Compareu els valors obtinguts a l'apartat anterior.*

   El valor més gran és el màxim absolut de f a $[a,b]$.

   El valor més petit és el mínim absolut de f a $[a,b]$.

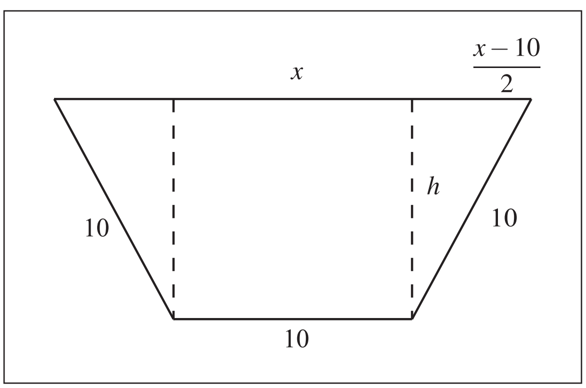


Fig. 13.5

Exemple 13.3.2 *Es vol dissenyar un canal de capacitat màxima per a conducció d'aigua. La secció transversal del canal ha de tenir forma de trapezi isòsceles, essent la base inferior i els dos costats de 10 m de longitud. Quina ha de ser l'amplada (base superior de la secció transversal) del canal?*

Si anomenem x la base superior i h l'altura de la secció transversal, la funció de la que volem trobar els extrems és:

$$A = \text{àrea} = \frac{\text{base superior} + \text{base inferior}}{2} \cdot \text{altura}$$

$$= \frac{x+10}{2} \cdot h$$

Observem que

$$h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{x-10}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{-x^2+20x+300}}{2}$$

Llavors, la funció resulta ser

$$A(x) = \frac{x+10}{2} \cdot \frac{\sqrt{-x^2+20x+300}}{2} = \frac{1}{4}(x+10)\sqrt{-x^2+20x+300} \quad \text{amb} \quad x \in [0,30]$$

(la base superior no pot ser més gran que la suma dels altres tres costats: $10+10+10=30$)

Derivem i igualem a 0

$$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-x^2+10x+200}{\sqrt{-x^2+20x+300}}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+10x+200 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -10 \notin [0,30] \\ 20 \end{cases}$$

Com que la funció és derivable en $(0,30)$ i els únics punts on no es pot derivar són 0 i 30, només hem de comparar els valors que pren l'àrea a $x=20$ i als extrems de l'interval:

$$A(0) = 25\sqrt{3}, \quad A(20) = 75\sqrt{3}, \quad A(30) = 0$$

Per tant, hem de prendre 20 m com a amplada de la secció transversal.

Definició 13.3.4 (*Creixement i decreixement*) *Donada una funció $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, direm que*

f és **creixent** *en un interval $I \subset A$, si $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \;\; \forall x,y \in I$*

f és **decreixent** *en un interval $I \subset A$, si $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \;\; \forall x,y \in I$*

Direm que una funció és **monòtona** *en un interval I si és creixent o bé decreixent en I.*

Definició 13.3.5 (*Monotonia estricta*) *Donada una funció $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, direm que*

f és **estrictament creixent** *en un interval $I \subset A$, si $x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \;\; \forall x,y \in I$*

f és **estrictament decreixent** *en un interval $I \subset A$, si $x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \;\; \forall x,y \in I$*

Direm que una funció és **estrictament monòtona** *en un interval I si és estrictament creixent o bé estrictament decreixent en I.*

Teorema 13.3.3 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció derivable en l'interval obert (a,b), aleshores:*

Si $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in (a,b)$ f és estrictament creixent a (a,b)

Si $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in (a,b)$ f és estrictament decreixent a (a,b)

Aquest teorema ens permet determinar intervals on una funció és estrictament creixent o decreixent.

Primer busquem els punts crítics (punts on la derivada s'anul·la o no existeix) d'una funció donada.

Aquests valors divideixen l'eix real en intervals, on estudiem el signe de la derivada. Si $f'(x) > 0$ en un interval, aleshores f creix estrictament en aquest interval i de la mateixa manera f decreix estrictament si $f'(x) < 0$ en un interval.

Exemple 13.3.3 *Sigui* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la funció definida per* $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$*. Determineu on és estrictament creixent o decreixent la funció* f*.*

1. *Calculem el domini de* f*:* $Dom f = \mathbb{R} - \{-1\}$
2. f *és derivable* $\forall x \in Dom f$ *i* $f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$
3. *Busquem els punts crítics:* $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *o bé* $x = -3$*.*

Així, doncs,

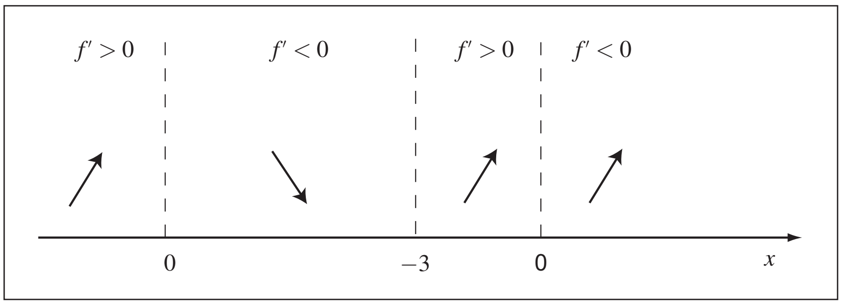


Fig. 13.6

Per tant, f creix a $(-\infty, -3)$, $(-1, 0)$ i $(0, +\infty)$ i decreix a $(-3, -1)$.

Test de la derivada primera pel càlcul d'extrems relatius

Sigui $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció contínua en el seu domini.

1. Trobeu els punts crítics de f, és a dir, els punts c del domini de f on $f'(c) = 0$ o bé no existeix $f'(c)$.
2. Per cada punt crític c tenim

   (a) El punt $f(c)$ és **màxim relatiu** de f si es compleixen les dues condicions següents:

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (a,c) \text{ interval a l'esquerra de } c \\ \qquad\qquad\qquad i \\ f'(x) < 0 \ \ \forall x \in (c,b) \text{ interval a la dreta de } c \end{cases}$$

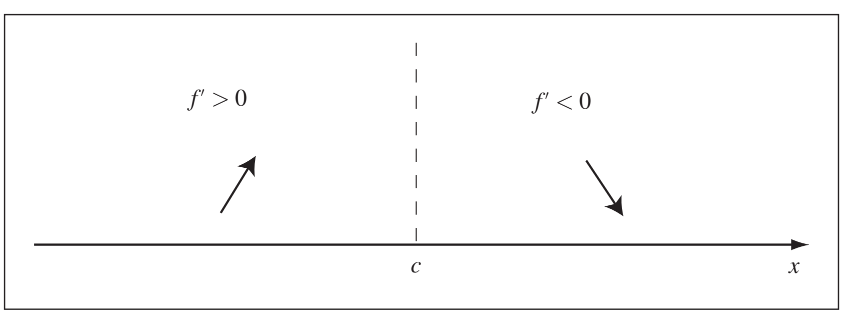


Fig. 13.7

(b) El punt $f(c)$ és **mínim relatiu** de f si es compleixen les dues condicions següents:

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \;\; \forall x \in (a,c) \text{ interval a l'esquerra de } c \\ \qquad\qquad i \\ f'(x) > 0 \;\; \forall x \in (c,b) \text{ interval a la dreta de } c \end{cases}$$

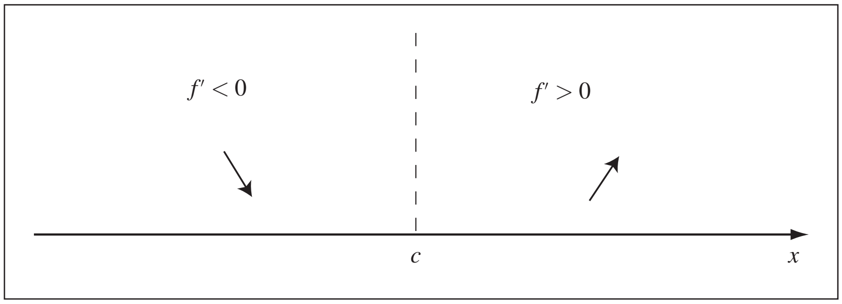


Fig. 13.8

(c) El punt $f(c)$ no és un extrem relatiu si f' té el mateix signe als intervals oberts a la dreta i a l'esquerra de c.

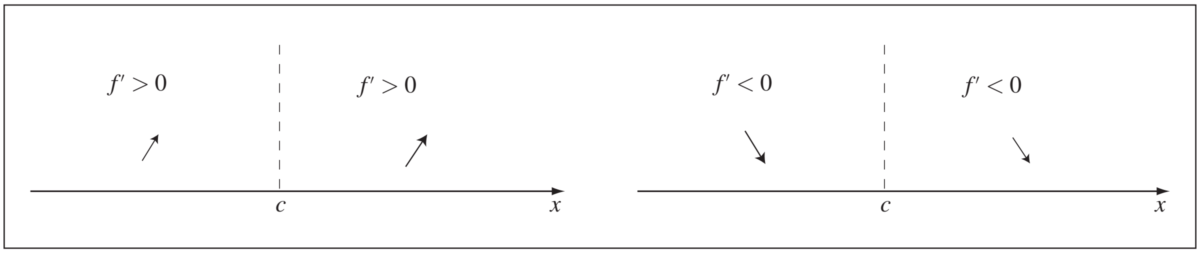


Fig. 13.9

Exemple 13.3.4

Aplicant aquest test podem dir, doncs, que la funció $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ estudiada a l'exemple 13.3.3 té un màxim relatiu a $x = -3$ i que el punt $x = 0$ no és extrem.

Fixem-nos que del punt $x = -1$ no podem dir res perquè no pertany al domini.

Test de la derivada segona per extrems relatius

Sigui $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = 0$ i existeix la derivada segona en un interval obert que conté c.

Aleshores,

- Si $f''(c) > 0$ hi ha un mínim relatiu a $x = c$
- Si $f''(c) < 0$ hi ha un màxim relatiu a $x = c$
- Si $f''(c) = 0$ aquest test no dóna informació.

Exemple 13.3.5

A l'exemple 13.3.3 estudiem la funció $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

A $\mathbb{R} - \{-1\}$ f és derivable dues vegades i $f''(x) = \dfrac{6x}{(x+1)^4}$

Com que $f''(-3) < 0 \Rightarrow$ A $x = -3$ f té un màxim relatiu.

Com que $f''(0) = 0$ el test falla per $x = 0$.

Una pregunta que es fa sovint és la de quin dels dos tests és millor per aplicar: el de la primera derivada o el de la segona? Doncs depèn. D'aquests dos criteris es pot aplicar el que sigui més convenient o senzill en cada cas, perquè tots dos són vàlids. Si la derivada segona és fàcil de calcular (com per exemple en el cas dels polinomis) el test de la derivada segona és ràpid, però si $f''(c)$ és difícil de calcular o bé $f''(c) = 0$ pot ser més fàcil o fins i tot necessari aplicar el test de la derivada primera.

En l'exemple 13.3.5 com que $f''(0) = 0$ s'ha de tornar a la derivada primera per completar l'estudi del càlcul d'extrems. En aquest cas hem vist que en $x = 0$ no hi pot haver extrem ja que

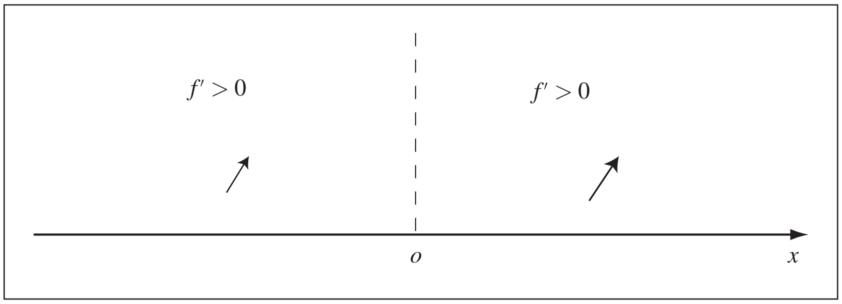


Fig. 13.10

Exemple 13.3.6 *Estudieu els extrems relatius i absoluts de la funció*

$$f : [-3,3] \to \mathbb{R} \ \text{ definida per } \ f(x) = |6 - 4x|$$

Si apliquem la definició de valor absolut i considerant que el domini de f és [-3,3].

$$f(x) = \begin{cases} 6 - 4x & \text{si} \quad 6 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2} \\ 4x - 6 & \text{si} \quad 6 - 4x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

f és contínua en el seu domini

Si $x < \frac{3}{2}$ f és derivable i $f'(x) = -4$

Si $x > \frac{3}{2}$ f és derivable i $f'(x) = 4$

En $x = \frac{3}{2}$ calculem $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{3}{2})}{x - \frac{3}{2}}$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}^+} \frac{f(x) - f(\frac{3}{2})}{x - \frac{3}{2}} = \lim_{x \to \frac{3}{2}^+} \frac{4x - 6}{x - \frac{3}{2}} = 4 \qquad \lim_{x \to \frac{3}{2}^-} \frac{f(x) - f(\frac{3}{2})}{x - \frac{3}{2}} = \lim_{x \to \frac{3}{2}^-} \frac{6 - 4x}{x - \frac{3}{2}} = -4$$

Com que aquests dos límits laterals no coincideixen, no existeix la derivada de f en $x = \frac{3}{2}$. Per tant, f és derivable $\forall x \in [-3,3] - \{\frac{3}{2}\}$.

Com que f' no s'anula mai, els únics punts crítics són $x = \frac{3}{2}$, $x = -3$ i $x = 3$.

Si apliquem el test de la derivada primera tenim

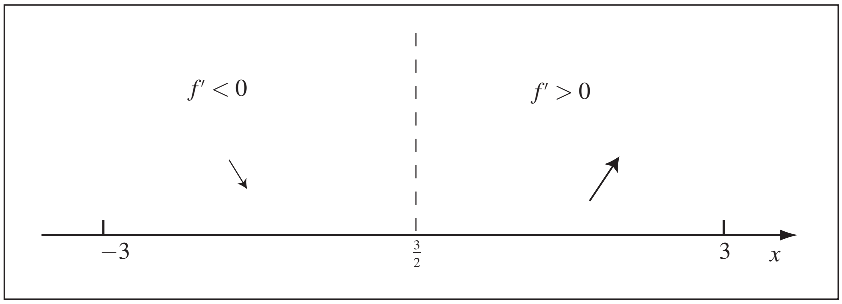


Fig. 13.11

per tant, en $x = \frac{3}{2}$ f té un mínim relatiu.

Com que f és contínua sobre $[-3,3]$ el teorema de Weierstrass ens assegura que f té màxim i mínim absolut. Avaluem doncs la funció en els possibles extrems absoluts:

$$f(-3) = 18, \quad f(3) = 6, \quad f(\frac{3}{2}) = 0$$

Per tant, a $x_1 = -3$ hi ha el màxim absolut i a $x_2 = \frac{3}{2}$ hi ha el mínim absolut. Veure la figura 13.12.

13.4 Aplicació a la representació del gràfic de funcions

Una altra aplicació important de les derivades és la representació del gràfic de funcions. Per fer un estudi detallat, hem de recordar algunes definicions importants, com són les que fan referència a la simetria de funcions, concavitat i convexitat, punts d'inflexió i asímptotes.

Tot i que actualment hi ha molt bones eines informàtiques de càlcul que ens permeten obtenir la representació gràfica de funcions reals de variable real, convé saber interpretar el gràfic d'una funció determinada. Actualment, apareixen molts gràfics a matemàtiques, enginyeria, física, economia i moltes altres branques. Conèixer el gràfic ens pot ajudar a entendre el nostre problema objecte d'estudi.

Definició 13.4.1 (*Talls amb els eixos*) *Donada* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *si* $0 \in Dom f$ *i* $f(0) = b$, *aleshores el punt* $(0,b)$ *s'anomena la* **intersecció amb l'eix y** *del gràfic de* f. *Si* $a \in Dom f$ *tal que* $f(a) = 0$, *aleshores el punt* $(a,0)$ *és una* **intersecció amb l'eix x** *del gràfic de* f.

Definició 13.4.2 (*Simetries bàsiques*) *Direm que una corba* $y = f(x)$ *és* **simètrica** *respecte de*

l'eix OX *si* $f(x) = -f(x)$ $\forall x \in Dom f$.

l'eix OY *si* $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in Dom f$.

l'origen de coordenades *si* $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in Dom f$.

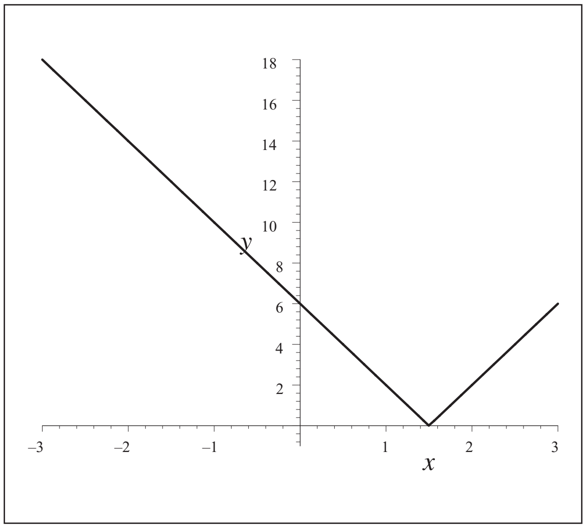


Fig. 13.12 Gràfic de la funció $f(x) = |6-4x|$

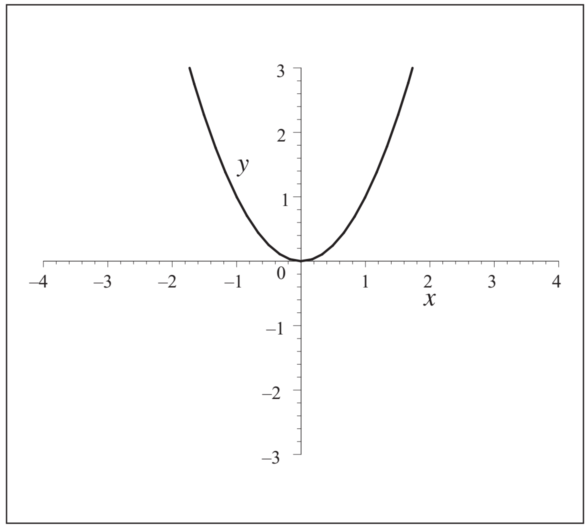


Fig. 13.13 Gràfic de la funció $f(x) = x^2$

Observem que si f és una funció, només té sentit parlar de simetria respecte de l'eix de coordenades (OY) i respecte de l'origen de coordenades.

Definició 13.4.3 *Direm que* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *és* **parell** *si* $f(-x) = f(x)\ \ \forall x \in Dom f$

Direm que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *és* **senar** *si* $f(-x) = -f(x)\ \ \forall x \in Dom f$

Observació: Si f és una funció parell aleshores és simètrica respecte de l'eix OY i si és senar és simètrica respecte de l'origen de coordenades.

Exemple 13.4.1

$f(x) = x^2$ és parell perquè $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Veure la figura 13.13.

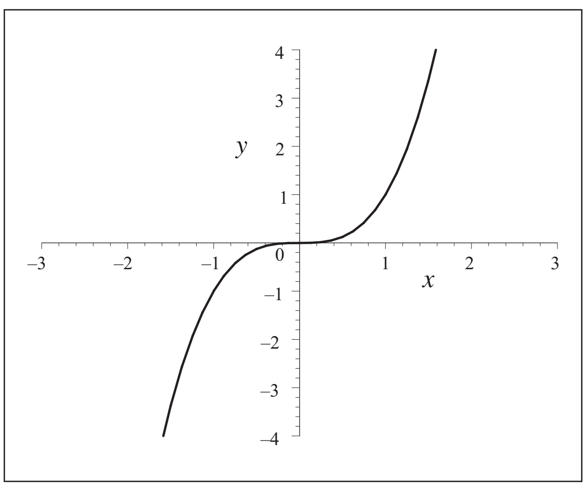


Fig. 13.14 Gràfic de la funció $g(x) = x^3$

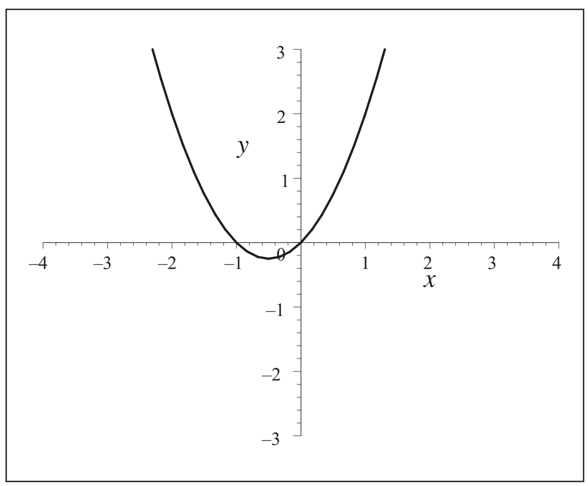


Fig. 13.15 Gràfic de la funció $h(x) = x^2 + x$

$g(x) = x^3$ és senar perquè $g(-x) = -x^3 = -g(x)$. Veure la figura 13.14.

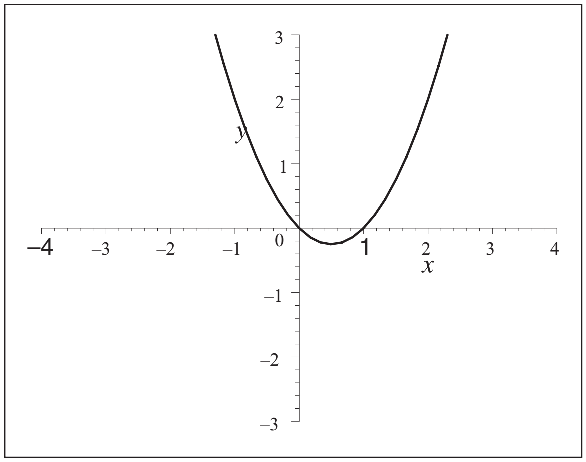


Fig. 13.16 Gràfic de la funció $f(x) = x^2 - x$

Observem que no sempre una funció ha de ser parell o senar. Per exemple, la funció $h(x) = x^2 + x$ no és parell ni senar perquè

$$h(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$$

i, per tant, $h(-x) \neq h(x)$ i

$$h(-x) \neq -h(x)$$

Definició 13.4.4 (*Concavitat i convexitat per a funcions derivables*) *Sigui*

$$f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

una funció derivable en un punt $x_0 \in (a,b)$.

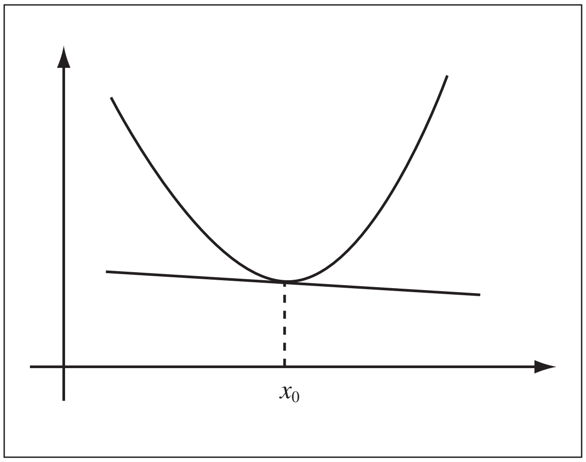


Fig. 13.17

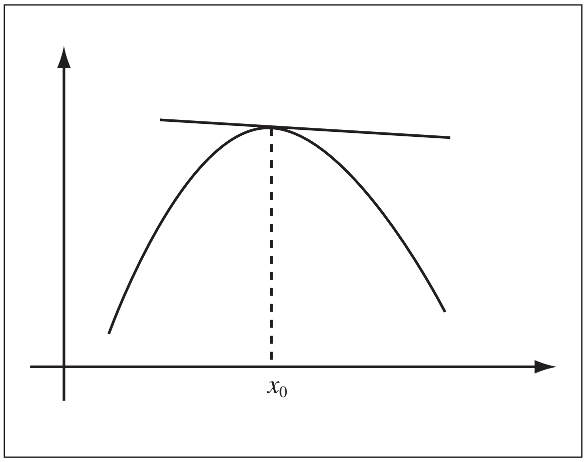


Fig. 13.18

Direm que f és **convexa** *en x_0 si existeix un entorn del punt on el gràfic de la funció f "està per sobre" de la recta tangent al gràfic en el punt $(x_0, f(x_0))$. Veure la figura 13.17.*

Direm que f és **còncava** *en x_0 si existeix un entorn del punt on el gràfic de la funció f "està per sota" de la recta tangent al gràfic en el punt $(x_0, f(x_0))$. Veure la figura 13.18.*

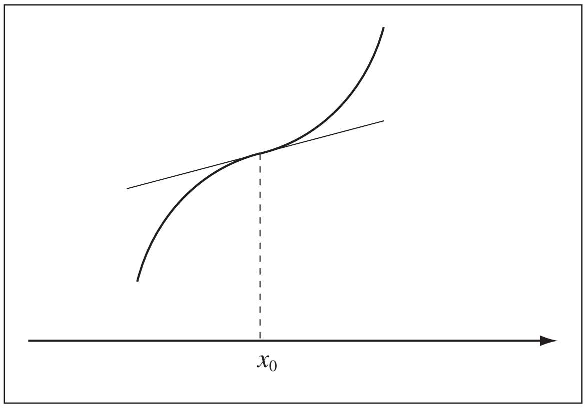


Fig. 13.19 Punt d'inflexió

Hi ha autors que allò que aquí es diu convex en diuen concau, i a l'inrevés.

La definició de concavitat i convexitat que hem donat no és la definició més general, però cobreix els objectius generals.

Definició 13.4.5 (*Punt d'inflexió*) *Direm que la funció $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en un punt $x_0 \in (a,b)$ té un* **punt d'inflexió** *en x_0 si el gràfic canvia de curvatura, és a dir, passa de còncava a convexa o viceversa.*

Observació: Aquestes tres definicions no són excloents, és a dir, hi ha funcions derivables en un punt, que no són convexes, ni còncaves ni tenen una inflexió en aquest punt.

Per exemple, la funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

en el punt $x_0 = 0$.

Propietat 13.4.1 *Si $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció dues vegades derivable en $x_0 \in (a,b)$, aleshores,*

$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ es convexa en } x_0.$$
$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ es cóncava en } x_0.$$

Si x_0 és un punt d'inflexió, aleshores $f''(x_0) = 0$.

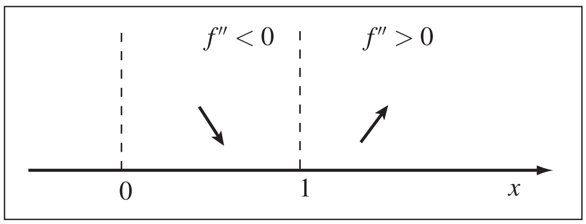


Fig. 13.20

Exemple 13.4.2 *Estudieu la concavitat, convexitat i punts d'inflexió de la funció*

$$f : (0, +\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definida per $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x} - \ln x.$

La funció f és derivable dues vegades a $(0, +\infty)$, essent $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{2x^2}$ i $f''(x) = \dfrac{x-1}{x^3}$.

Busquem els punts on $f''(x) = 0$ o bé no existeix f''.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Per tant, f és convexa a l'interval $(0,1)$ i f és còncava a l'interval $(1, +\infty)$.

Podem dir que $x = 1$ és un punt d'inflexió? La propietat 13.4.1 només ens assegura que $x = 0$ pot ser un punt d'inflexió. La definició de punt d'inflexió no és prou operativa per caracteritzar còmodament els punts d'inflexió (pensem, per exemple, en les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = x^4$). El teorema següent ajuda en aquest estudi.

Teorema 13.4.1 *Sigui $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció real que té derivades de qualsevol ordre en un entorn del punt x_0.*

Si

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \ \ i \ \ f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

aleshores,

si n és parell i $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$ té un mínim relatiu a x_0

si n és parell i $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$ té un màxim relatiu a x_0

si n és senar $\Rightarrow x_0$ punt d'inflexió.

Exemple 13.4.3

Aplicant doncs el teorema 13.4.1 a l'exemple 13.4.2 (figura 13.21), com que $f'''(1) \neq 0$ podem assegurar que f té un punt d'inflexió en $x = 1$.

Detall del punt d'inflexió (fig. 13.22):

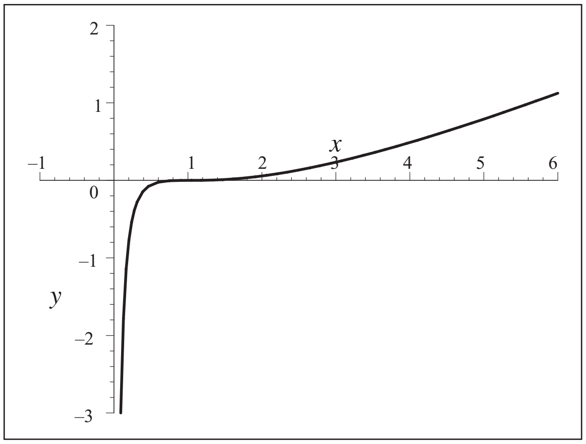


Fig. 13.21 Gràfic de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x} - \ln x$

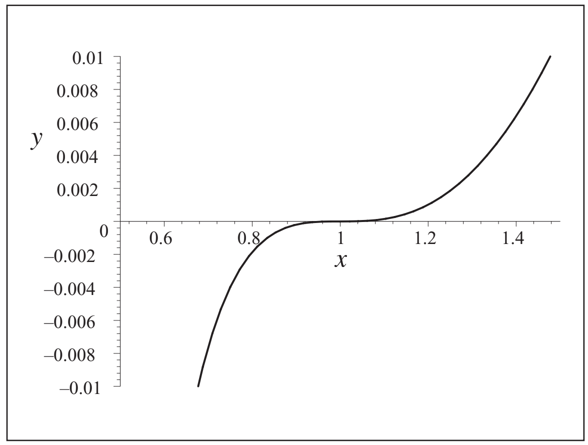


Fig. 13.22

Definició 13.4.6 (*Asímptotes verticals, horitzontals i oblíqües*) *Considerem* $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Direm que la recta $x = c$ *és una* **asímptota vertical** *del gràfic de* f *si és infinit un dels dos límits següents*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \quad \text{o bé} \quad \lim_{x \to c^+} f(x).$$

La recta $y = l$ *és una* **asímptota horitzontal** *del gràfic de* f *si*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad \text{o bé} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = l.$$

La recta $y_r = mx + n$ *és una* **asímptota oblíqua** *del gràfic de* f *si*

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_r) = 0$$

i una forma pràctica de calcular-la és veient si existeixen m *i* n*, tals que*

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad i \quad n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$$

Quan fem el límit a $-\infty$ *estudiem asímptotes oblíques per l'esquerra i anàlogament amb* $+\infty$ *per la dreta.*

Exemple 13.4.4 *Considerem la funció* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida per*

$$f(x) = |x-1| - 2\ln\frac{x}{x+1}$$

Determineu les seves asímptotes en cas que existeixin.

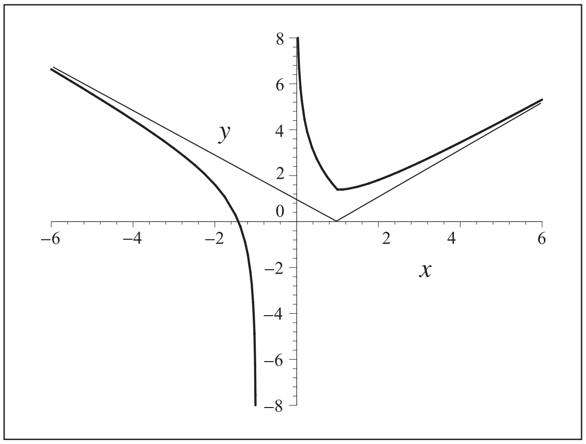


Fig. 13.23 Gràfic de la funció $f(x) = |x-1| - 2\ln\dfrac{x}{x+1}$

Primer de tot estudiem el domini de la funció f. Com que a $\mathbb{R}$ el denominador d'una fracció no pot ser mai zero

$$x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$

i, a més a més, com que la funció logarítmica està definida a $\mathbb{R}^+$ imposem que

$$\frac{x}{x+1} > 0$$

D'aquí deduïm que $Dom f = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

- asímptotes verticals

  Com que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$$

  les rectes $x = 0$ i $x = -1$ són asímptotes verticals.

- asímptotes horitzontals

  En aquest cas no hi ha asímptotes horitzontals perquè

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$$

- asímptotes oblíqües

  Com que

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{i} \quad n = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - x) = -1$$

  la recta $y = x - 1$ és asímptota oblíqua quan $x \longrightarrow +\infty$.

  De

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad \text{i} \quad n = \lim_{x\to -\infty} (f(x) + x) = 1$$

  deduïm que la recta $y = -x + 1$ és una asímptota oblíqua quan $x \to -\infty$.

A continuació donarem una metodologia aconsellable per obtenir la representació gràfica d'una funció.

Donada $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, estudieu

1. el domini de f,
2. les simetries (funció parell o senar),
3. els punts de tall del gràfic de la funció amb els eixos,
4. la continuïtat de f,
5. el signe de f' (creixement i decreixement),
6. el signe de f'' (concavitat i convexitat),
7. les asímptotes.

Exemple 13.4.5 *Representeu gràficament la funció*

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

- Domini:

  $Dom f = \mathbb{R}$

- Simetries:

  $f(x) = f(-x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, per tant, la funció és parell i només cal estudiar-la a l'interval $[0,+\infty)$

- Continuïtat:

  Una funció arrel cúbica és una funció contínua, per tant, la funció serà contínua en tot el domini.

- Límits als extrems del domini:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}\right) = +\infty$$

  No hi haurà asímptotes horitzontals però n'hi podrien haver d'oblíqües.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}{x} = 0$$

  (perquè el "grau" del numerador és inferior al grau del denominador). Per tant, tampoc hi haurà asímptotes oblíqües.

- Derivabilitat:

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

  La funció arrel cúbica no és derivable quan s'anul·la, llavors $f(x)$ no serà derivable a $x = 1$ i a $x = -1$. A més a més,

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty \quad \lim_{x\to -1^+} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty \quad \lim_{x\to -1^-} f'(x) = -\infty$$

  Per tant, en aquests punts $f(x)$ tindrà una punxa vertical.

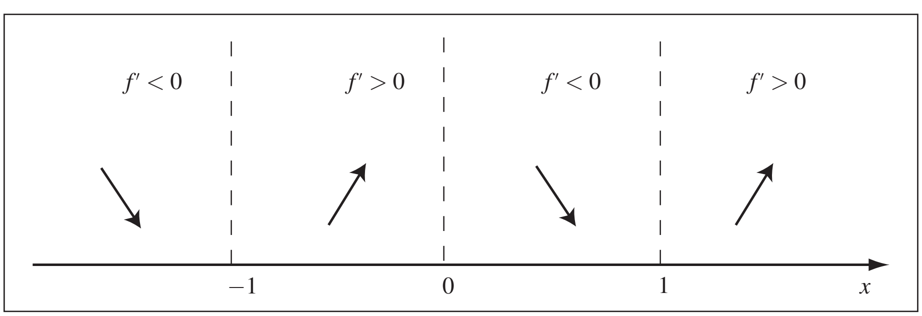


Fig. 13.24

- Creixement, decreixement, màxims i mínims:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}=\frac{-2}{3\sqrt[3]{x-1}} \Leftrightarrow x+1=-x+1 \Leftrightarrow x=0$$

Estudiem el signe de la derivada als intervals $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ i $(1,+\infty)$.

$f'(-2)=-1{,}1289 \Rightarrow f(x)$ és decreixent a $(-\infty,-1)$.

$f'(-0{,}5)=0{,}2575 \Rightarrow f(x)$ és creixent a $(-1,0)$.

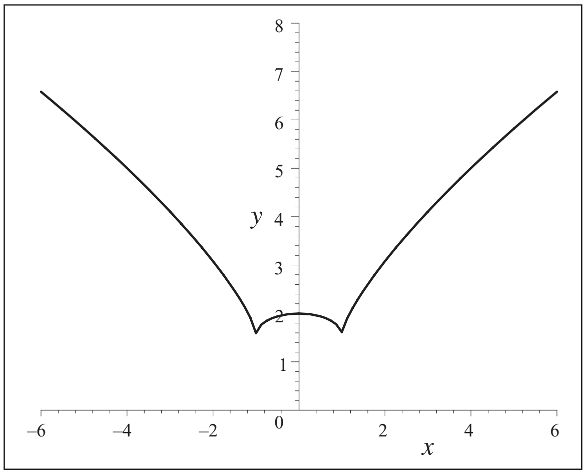


Fig. 13.25 Gràfic de la funció $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$

$f'(0{,}5)=-0{,}2575 \Rightarrow f(x)$ és decreixent a $(0,1)$.

$f'(2)=1{,}1289 \Rightarrow f(x)$ és creixent a $(1,+\infty)$.

Per tant, a $x=0$ hi haurà un màxim relatiu, i a $x=-1$ i a $x=1$ (punts de no derivabilitat) mínims angulars.

- Concavitat, convexitat i punts d'inflexió:

$$f''(x)=\frac{-2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\right)$$

Com que $f''(x)$ és negativa per a tot x, $f(x)$ no tindrà punts d'inflexió i sempre serà còncava.

- Representació gràfica (fig. 13.25)

Exemple 13.4.6 *Representeu gràficament la funció*

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)e^{\frac{-1}{|x-1|}} & \text{si} \quad x\neq 1\\ 0 & \text{si} \quad x=1\end{cases}$$

- Domini:

  $Dom f=\mathbb{R}$

- Continuïtat:

  Com que les funcions valor absolut i exponencial són contínues, i el denominador del quocient és diferent de 0, la funció només pot deixar de ser contínua al punt on s'ha definit aïlladament, és a dir, $x=1$.

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)e^{\frac{-1}{|x-1|}}=0\cdot e^{\frac{-1}{+0}}=0\cdot e^{-\infty}=0\cdot 0=0=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^-}(x-1)e^{\frac{-1}{|x-1|}}=0\cdot e^{\frac{-1}{+0}}=0\cdot e^{-\infty}=0\cdot 0=0=f(1)$$

Llavors, la funció és contínua a tot $\mathbb{R}$, i no hi haurà asímptotes verticals.

- Límits als extrems del domini:

  Límit a $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{\frac{-1}{|x-1|}}=+\infty\cdot e^{\frac{-1}{+\infty}}=+\infty\cdot e^{0}=+\infty$$

No hi haurà asímptota horitzontal, però pot haver-hi asímptota oblíqua.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)e^{\frac{-1}{|x-1|}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{|x-1|}} \\ &= (1-0)e^{\frac{-1}{+\infty}} = 1\cdot e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to+\infty}\left((x-1)e^{\frac{-1}{|x-1|}} - 1\cdot x\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left((x\left(e^{\frac{-1}{|x-1|}}-1\right) - e^{\frac{-1}{|x-1|}}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\frac{-1}{|x-1|} - \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{-1}{|x-1|}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x-1} - e^{\frac{-1}{+\infty}} \\ &= -1-e^0 = -2 \end{aligned}$$

(utilitzem l'infinitèsim $e^{g(x)}-1 \approx g(x)$ si $g(x)\to 0$)

Aquest límit es pot resoldre amb programes de càlcul, per exemple amb MAPLE.

```
> limit((x-1)*exp((-1)/(abs(x-1)))-x,x=+infinity);
```

$$-2$$

Per tant, hi haurà l'asímptota oblíqua $y = x-2$.

Límit a $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{\frac{-1}{|x-1|}} = -\infty\cdot e^{\frac{-1}{+\infty}} = -\infty\cdot e^0 = -\infty$$

No hi haurà asímptota horitzontal, però pot haver-hi asímptota oblíqua.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)e^{\frac{-1}{|x-1|}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{|x-1|}} \\ &= (1-0)e^{\frac{-1}{+\infty}} = 1\cdot e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to-\infty}\left((x-1)e^{\frac{-1}{|x-1|}} - 1\cdot x\right) \\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(x\left(e^{\frac{-1}{|x-1|}}-1\right) - e^{\frac{-1}{|x-1|}}\right) \\ &= \lim_{x\to-\infty} x\frac{-1}{|x-1|} - \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{-1}{|x-1|}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{-x+1} - e^{\frac{-1}{+\infty}} \\ &= 1-e^0 = 0 \end{aligned}$$

(utilitzem l'infinitèsim $e^{g(x)}-1 \approx g(x)$ si $g(x)\to 0$)

Per tant, hi haurà l'asímptota oblíqua $y = x$.

- Derivabilitat:

  Com que la funció exponencial és derivable, la funció valor absolut és derivable on no s'anul·la, i el denominador del quocient és diferent de 0, la funció només pot deixar de ser derivable a $x=1$.

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h-1)e^{\frac{-1}{|1+h-1|}}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} e^{\frac{-1}{|h|}} = e^{\frac{-1}{+0}} = e^{-\infty} = 0
\end{aligned}
$$

Llavors $f(x)$ és derivable a tot el domini, i

$$
f'(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-2}{x-1}\right) e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si} \quad x \in (-\infty, 1) \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \\ \left(\frac{x}{x-1}\right) e^{\frac{-1}{x-1}} & \text{si} \quad x \in (1, +\infty) \end{cases}
$$

- Creixement, decreixement, màxims i mínims:

  Observem que

$$
f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \notin (-\infty, 1) \\ x = 0 \notin (1, +\infty) \end{cases}
$$

  i, per tant, l'únic màxim o mínim relatiu possible està a $x = 1$.

  Estudiem el signe de la derivada per poder calcular els intervals de creixement i de decreixement. Com que tota funció exponencial és positiva, només cal estudiar el signe de les fraccions polinòmiques.

$$
x < 1 \Rightarrow \{x - 2 < 0 \ \text{ i } \ x - 1 < 0\} \Rightarrow f'(x) > 0
$$
$$
x > 1 \Rightarrow \{x > 0 \ \text{ i } \ x - 1 > 0\} \Rightarrow f'(x) > 0
$$

  Per tant, $f(x)$ és sempre una funció creixent, i al voltant de $x = 1$ la funció "és plana".

- Concavitat, convexitat i punts d'inflexió:

$$
f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^3} e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si} \quad x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{(x-1)^3} e^{\frac{-1}{x-1}} & \text{si} \quad x \in (1, +\infty) \end{cases}
$$

  Observem que

$$
x < 1 \Rightarrow f''(x) < 0
$$

i

$$
x > 1 \Rightarrow f''(x) > 0
$$

  per tant,

  $f(x)$ serà còncava a $(-\infty, 1)$

  $f(x)$ serà convexa a $(1, +\infty)$

  i a $x = 1$ hi haurà un punt d'inflexió.

- Representació gràfica:

  L'obtenim amb les següents instruccions de MAPLE:

```
> w:=proc(x) if x=1 then 0 else (x-1)*exp(-1/abs(x-1))
  end if
> end proc;
> plot(w,-4..6);
```

$$w := \mathtt{proc}(x)\,\mathtt{if}\,x = 1\,\mathtt{then}\,0\,\mathtt{else}\,(x-1)*\exp(-1/\mathtt{abs}(x-1))\,\mathtt{end\ if}\,\mathtt{end\ proc}$$

  Detall del punt d'inflexió (fig. 13.27)

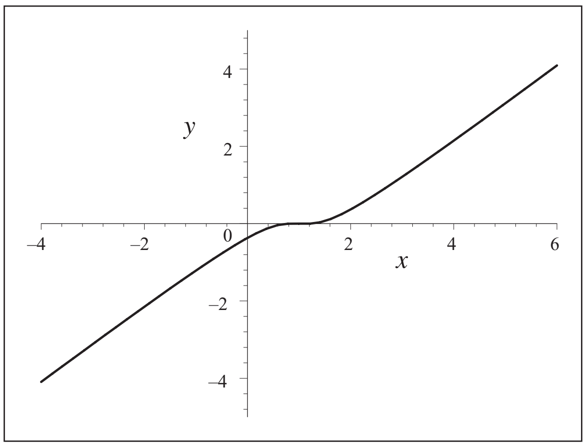


Fig. 13.26 Gràfic de la funció

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{\frac{-1}{|x-1|}} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

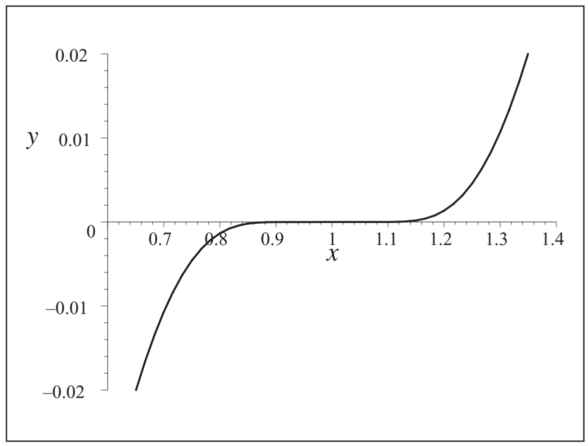


Fig. 13.27

Per consolidar els conceptes d'aquest capítol podeu anar a la pàgina
`http://www.wiris.net/upc.edu/collection`

14 Càlcul de primitives

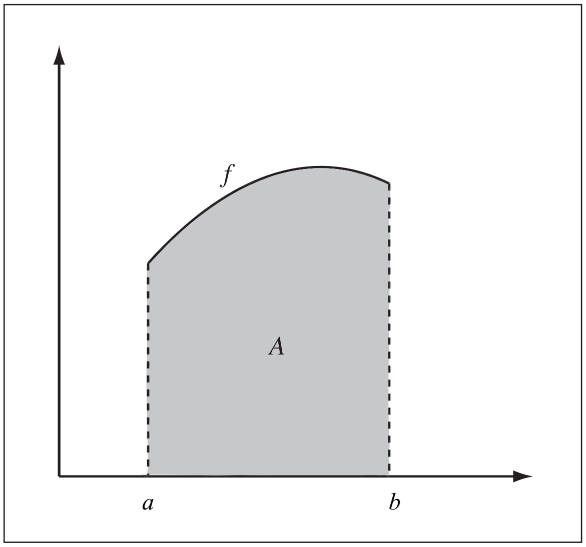


Fig. 14.1

El càlcul integral té els origens en el problema de calcular l'àrea sota una corba plana.

L'any 1686, a l'assaig *De geometria recondita*, de Gottfred Wilhelm Leibniz, s'exposen les regles fonamentals del càlcul integral, s'indiquen el caràcter invers de les operacions d' integració i diferenciació i s'utilitza per primera vegada el símbol $\int$ (inicial gòtica de la paraula suma), però Leibniz encara fa servir l' expressió *methodus tangentium inversa* o *calculus summatorius*. La primera vegada que es va utilitzar el terme *integral* va ser Jakob Bernoulli (1655-1705) l'any 1690, i el 1698 Leibniz i Johan Bernoulli (1667-1748) van acordar la notació *calculus integralis*. Cauchy va introduir molt més rigor en el desenvolupament de la teoria de la integral que va ser generalitzada més endavant per Riemann i finalment per Lebesgue (1875-1941).

Isaac Barrow (1630-1677) va escriure l'anomenada regla de Barrow, on es relacionen els conceptes de derivada i integral i es fa possible el càlcul d'una integral d'una funció real de variable real definida en un interval utilitzant el concepte de funció primitiva que donarem tot seguit. La regla de Barrow dirà que si $f:\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció contínua que té primitiva una funció F, aleshores,

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Per tant, entenem el càlcul de primitives com l'element essencial del càlcul integral.

En aquest capítol veurem mètodes que permeten calcular primitives d'una gran varietat de funcions. Estudiarem el mètode d'integració per parts, el teorema del canvi de variable i donarem els mètodes més usuals de càlcul de primitives per a funcions racionals, trigonomètriques i irracionals. D'altra banda, el càlcul de primitives és un bon tema per desenvolupar les habilitats de càlcul, important en totes les branques de les matemàtiques.

Actualment hi ha sistemes d'integració simbòlica molt bons que permeten calcular primitives, tot i que per poder-los utilitzar s'han de conèixer certes tècniques d'integració. Nosaltres introduirem i comentarem exemples fets amb MAPLE 7, INTEGRATOR i WIRIS, sistemes que permeten obtenir ràpidament les integrals de moltes funcions. Hem de tenir molt clar que el perfeccionament de la tecnologia fa que la metodologia a vegades perdi importància, però en cap cas perden importància les idees i els mètodes de raonament.

14.1 Primitives i integral indefinida

Definició 14.1.1 (Primitiva d'una funció real de variable real) *Direm que F és una pri- mitiva de $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, que se suposarà acotada, si F és contínua en $[a,b]$ i derivable en (a,b) amb $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in(a,b)$.*

Definició 14.1.2 (Integral indefinida) *Si F és una primitiva de f en $[a,b]$ llavors qualsevol altra primitiva G difereix de F en una constant, és a dir $G(x)=F(x)+C$. Al conjunt de totes les funcions primitives de f en $[a,b]$ l'anomenem integral indefinida de f en $[a,b]$ i se simbolitza mitjançant $\int f(x)dx$.*

$$\int f=\{F+C \mid F'=f,\ C \text{ constant}\}$$

14.1.1 Integrals immediates

La definició de primitiva permet entendre el procés d'integració com un procés de derivació inversa o antiderivació. Les regles de derivació de les funcions més usuals condueixen a l'anomenada taula d'integrals immediates, i va ser Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) qui va construir la primera taula d'integrals. No existeix un criteri objectiu per determinar si una integral és o no immediata, d'aquí que la taula pugui aparèixer amb diferent nombre d'entrades segons la font. (C indica una constant qualsevol.)

$$\begin{aligned}
\int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ \ n\neq -1\\
\int \frac{1}{x}dx &= \ln|x|+C\\
\int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a}+C\ \ (a>0,\ a\neq 1)\\
\int e^x dx &= e^x+C\\
\int \sin x dx &= -\cos x+C\\
\int \cos x dx &= \sin x+C\\
\int \tan x dx &= -\ln|\cos x|+C\\
\int \frac{1}{\cos^2 x}dx &= \tan x+C\\
\int \frac{-1}{\sin^2 x}dx &= \cot x+C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \sinh x dx &= \cosh x + C \\
\int \cosh x dx &= \sinh x + C \\
\int \frac{dx}{\cosh^2 x} &= \tanh x + C \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \arg\sinh x + C \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \arg\cosh x + C \\
\int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + C \\
\int \frac{dx}{1-x^2} &= \arg\tanh x + C
\end{aligned}$$

Nota: Aplicant la regla de la cadena, es dedueix que $\int f(u(x))u'(x)dx$ és immediata sempre que ho sigui $\int f(x)dx$.

$$(f(u(x)))' = f'(u(x))u'(x) \Rightarrow f(u(x)) = \int f'(u(x))u'(x)dx$$

Exemple 14.1.1 *Com que*

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ tenim que } \int \frac{u'}{u}dx = \ln u + C$$

Exemple 14.1.2

$$\int \frac{u'}{1+u^2}dx = \arctan u + C$$

Hi ha integrals que no estan a la llista d'integrals immediates però s'hi podrien considerar perquè són les mateixes, llevat de modificacions dels coeficients.

Exemple 14.1.3 *Demostreu que* $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(\frac{x}{a})^2+1} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{1}{a}dx}{(\frac{x}{a})^2+1} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

Amb MAPLE podem introduir la funció que volem integrar i obtenim la primitiva, encara que no sempre amb la seva expressió més simplificada. Primer introduïm l'operació que volem que ens faci, i el programa ens en dóna el resultat.

En el cas d'aquest exemple, escriurem

```
> int(1/(x^2+a^2),x);
```

i el programa dóna la solució

$$\frac{\arctan(\frac{x}{a})}{a}$$

que com veiem coincideix, llevat que no hi consta la constant d'integració, amb el resultat que nosaltres havíem deduït. La majoria de sistemes de càlcul simbòlic acostumen a donar 0 com a constant d'integració.

14.2 Mètodes d'integració

L'expressió analítica d'una primitiva per a una funció donada no sempre existeix i, quan existeix, tampoc es disposa d'un procediment sistemàtic i general per trobar-la.

De la teoria de la Integral de Riemann es dedueix que qualsevol funció $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua té primitiva. Però no tota funció racional, potencial, exponencial, logarítmica i trigonomètrica i els resultats obtinguts a partir de totes elles mitjançant sumes, producte, divisions i/o composicions, té una primitiva del mateix tipus.

Funcions que apareixen moltes vegades en el càlcul i en la teoria de Probabilitats, com per exemple e^{-x^2}, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\sqrt{1+x^4}$, $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $\forall k: 0<k<1$, no tenen primitives expressables mitjançant funcions com les que hem comentat anteriorment.

En aquests casos si hem de calcular $\int_a^b f(x)dx$ el que es fa és recórrer a la integració numèrica aproximada.

Es disposa, no obstant, de mètodes o regles de caràcter general (integració per parts i integració per substitució o canvi de variable) que es basen en les corresponents regles de derivació de la suma, producte i funció composta respectivament. L'aplicació d'un o més d'aquests mètodes permet el càlcul de primitives per algunes classes de funcions conegudes com les racionals, les trigonomètriques i hiperbòliques i alguns tipus de funcions irracionals.

Propietat 14.2.1 *Si les funcions f,g tenen primitiva en un interval I llavors la primitiva de la funció $\alpha f+\beta g$, $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ està donada per:*

$$\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx \quad \text{(linealitat de la integral)}$$

Aquest mètode permet reduir moltes integrals a suma d'integrals immediates.

Exemple 14.2.1

$$\int(ax^2+bx+c)dx=a\int x^2dx+b\int xdx+c\int dx=\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx+C$$

Exemple 14.2.2

$$\int \frac{x}{x-1}dx = \int \left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx = \int dx + \int \frac{1}{x-1}dx = x+\ln|x-1|+C$$

Amb MAPLE obtenim el mateix resultat:

```
> int(x/(x-1),x);
```

$$x+\ln(x-1)$$

Observem que MAPLE no posa el valor absolut. En canvi, WIRIS sí que ho fa.

$$\int \frac{x}{x-1} \rightarrow \ln(|x-1|)+x$$

14.2.1 Integració per parts

Si $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ i $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ són dues funcions que tenen derivada contínua en un interval I, llavors:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Aquest mètode d'integració es basa en la derivada d'un producte. Sigui

$$h(x) = u(x)v(x)$$

on $u(x), v(x)$ són dues funcions que tenen derivada contínua (és a dir, de clase $\mathscr{C}^1$) en un interval I.

Derivant la funció $h(x)$ tindrem:

$$h'(x) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

D'on, integrant obtenim:

$$\int h'(x)dx = h(x) = u(x)v(x) = \int u(x)v'(x)dx + \int v(x)u'(x)dx$$

Per tant,

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Aquest mètode resulta aconsellable quan la funció a integrar es pot descomposar en un producte de la forma indicada i quan, a més a més, $\int v(x)u'(x)dx$ és més fàcil de calcular que $\int u(x)v'(x)dx$. A vegades el mètode d'integració per parts no condueix directament a la primitiva de la funció sinó a una altra que, sovint, es resol aplicant el mètode per parts de forma recorrent.

Exemple 14.2.3 *Calculeu*

$$\int \ln x dx$$

Si $\begin{cases} u(x) = \ln x, & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 1, & v(x) = x \end{cases}$ obtenim:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Amb MAPLE podem obtenir la primitiva directament:

```
> int(ln(x),x);
```

$$x \ln(x) - x$$

Així mateix, MAPLE té uns comandaments per fer servir el mètode d'integració per parts, definint quina és la funció u:

```
> intparts(Int(ln(x),x),ln(x));
```

$$x \ln(x) - \int 1\, dx$$

```
> x*ln(x)-int(1,x);
```

$$x \ln(x) - x$$

Exemple 14.2.4 *Calculeu*

$$\int e^x \cos x dx$$

Si $\begin{cases} u(x) = \cos x, & u'(x) = -\sin x \\ v'(x) = e^x, & v(x) = e^x \end{cases}$ obtenim

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int -e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

Per resoldre $\int e^x \sin x dx$ utilitzem novament el mètode per parts, considerant:

$$\begin{cases} u(x) = \sin x, & u'(x) = \cos x \\ v'(x) = e^x, & v(x) = e^x \end{cases}$$

De manera que

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

La integral original passa a ser:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

Per tant,

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}(e^x \cos x + e^x \sin x) + C$$

Amb MAPLE podem arribar a obtenir una expressió bastant avançada, però en cap cas ens estalvia el darrer pas.

```
> intparts(Int(exp(x)*cos(x),x),cos(x));
```

$$e^x \cos(x) - \int -\sin(x)\, e^x \, dx$$

```
> exp(x)*cos(x)+intparts(Int(exp(x)*sin(x),x),sin(x));
```

$$e^x \cos(x) + \sin(x)\, e^x - \int e^x \cos(x)\, dx$$

Amb WIRIS procedim de la manera següent

$$\int e^x \cdot \cos(x) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot e^x \cdot \cos(x) + \frac{1}{2} \cdot e^x \cdot \sin(x)$$

14.2.2 Integració per substitució (canvi de variable)

Siguin $f : I \to \mathbb{R}$ contínua a I i $g : J \to \mathbb{R}$ funció derivable amb derivada contínua a J, tal que existeix la funció inversa g^{-1} i es verifica que $g(J) \subset I$ i a més a més $g'(t) \neq 0 \; \forall t \in J$ llavors es verifica que:

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt \quad \text{on } t = g^{-1}(x)$$

És a dir, substituïm la variable x per una nova variable t lligada a l'anterior per la relació $x = g(t)$ de la qual obtenim que $dx = g'(t)dt$. Escollint encertadament el canvi de variable aconseguim en molts casos simplificar una integral donada.

Exemple 14.2.5

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

(canvi: $u(x) = -x^2$, $du = -2xdx$)

Amb MAPLE arribem al mateix resultat, aplicant el canvi de variable de la manera següent:

```
> changevar(u=-x^2,Int(x*exp(-x^2),x),u);
```

$$\int -\frac{1}{2} e^{u}\, du$$

```
> int(-1/2*exp(u),u);
```

$$-\frac{1}{2} e^{u}$$

```
> changevar(u=-x^2,-1/2*exp(u),x);
```

$$-\frac{1}{2} e^{(-x^2)}$$

Exemple 14.2.6

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \int \frac{e^x}{(e^x)^2+1} dx = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + C = \arctan e^x + C$$

(canvi: $u(x) = e^x$; $du = e^x dx$)

14.3 Integració de funcions racionals

Una funció racional és un quocient de polinomis, és a dir, una funció de la forma $H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. La tècnica d' integració d'una funció racional consisteix a descomposar-la, mitjançant mètodes algebraics, en una suma de fraccions més simples que tinguin integrals immediates. Quan el grau de $P(x)$ és igual o més gran que el de $Q(x)$ sempre podem expressar $H(x)$ com a $H(x) = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ on $C(x)$ i $R(x)$ són respectivament el quocient i la resta de dividir $P(x)$ entre $Q(x)$, ara amb el grau de $R(x)$ menor que el de $Q(x)$. Com que la integral de $C(x)$ pot calcular-se fàcilment, el problema d'integració de funcions racionals es redueix al cas general on el grau de $P(x)$ és menor que el de $Q(x)$.

Una gran quantitat d'integrals que no són racionals a primer cop d'ull, poden racionalitzar-se (convertir-se en racionals) mitjançant un canvi de variable encertat.

14.3.1 Descomposició en fraccions simples

Tota fracció racional de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tal que $gr(P(x)) < gr(Q(x))$ pot expressar-se com una suma de fraccions del tipus:

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \ (n \geq 1)$$

si $a \in \mathbb{R}$ és arrel de $Q(x)$ o bé:

$$\frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}, \ (n \geq 1)$$

si els complexos $\alpha \pm \beta i$ són arrels de $Q(x)$.

Cada arrel dóna lloc a tants termes com multiplicitat té, i els coeficients $A, M, N\dots$ es determinen resolent el sistema que resulta d'igualar terme per terme $P(x)$ i el numerador de la fracció obtinguda al sumar els termes simples.

Exemple 14.3.1 *Descomposeu en suma de fraccions simples la fracció racional* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *sabent que la descomposició factorial de* $Q(x)$ *a* $\mathbb{C}$ *és*

$$Q(x) = (x+3)^2(x-2)(x-i)^2(x+i)^2$$

La fracció racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ admet la següent descomposició en suma de fraccions simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x+3)^2(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}$$

Donat un polinomi particular $P(x)$ es redueixen els sumands del segon terme de la igualtat a comú denominador i s'obtenen els valors de les constants indeterminades A, B, C, D, E, F i G igualant els dos polinomis dels respectius numeradors, tal com veurem més endavant en exemples concrets.

14.3.2 Integració de les fraccions simples

1. Arrels reals simples:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$$

2. Arrels reals múltiples:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$$

3. Arrels complexes simples:

$$\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \int \frac{Mx-M\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx + \int \frac{M\alpha+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx =$$

$$= \int \frac{M}{2}\frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx + \int \frac{M\alpha+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|(x-\alpha)^2+\beta^2| + \frac{M\alpha+N}{\beta}\arctan\frac{x-\alpha}{\beta} + C$$

Exemple 14.3.2 *Calculeu*

$$\int \frac{x+5}{x^2-4x+20}dx$$

$$\int \frac{x+5}{x^2-4x+20}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2-4x+20}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+20}dx + \frac{1}{2}\int \frac{14}{x^2-4x+20}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+20| + 7\int \frac{dx}{(x-2)^2+16} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+20| + \frac{7}{16}\int \frac{dx}{(\frac{x-2}{4})^2+1} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+20| + \frac{7}{4}\arctan\left(\frac{x-2}{4}\right) + C$$

4. Arrels complexes múltiples: en aquest cas la integració de les fraccions simples és laboriosa, cosa que fa que per integrar una funció racional amb arrels complexes múltiples s'utilitzi normalment el mètode d'Hermitte.

14.3.3 Mètode d'Hermitte

El mètode d'Hermite (1822-1901) pot utilitzar-se sempre que existeixin arrels múltiples (reals o complexes) però és especialment útil en el cas d'arrels complexes múltiples. Donarem una expressió general del mètode, tot i que us recomanem que per entendre el mètode us fixeu en l'exemple 14.3.7.

En general, si $Q(x)$ pot factoritzar-se de la forma:

$$Q(x) = (x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_k)^{r_k}[(x+\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{s_1}\cdots[(x+\alpha_L)^2+\beta_L^2]^{s_L}$$

llavors la funció racional admet la descomposició:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{P_1(x)}{(x-a_1)^{r_1-1}\cdots[(x+\alpha_L)^2+\beta_L^2]^{s_L-1}}\right) + \frac{P_2(x)}{(x-a_1)\cdots[(x+\alpha_L)^2+\beta_L^2]}$$

on P_1 y P_2 són polinomis amb coeficientes indeterminats de graus una unitat menys que els seus respectius denominadors. Els coeficients dels polinomis $P_1(x), P_2(x)$ poden obtenir-se derivant, reduint a comú denominador i identificant termes amb el polinomi $P(x)$.

En el cas particular on $Q(x) = [(x-\alpha)^2+\beta^2]^\mu$ tindrem la descomposició següent

$$\frac{P(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^\mu} = \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{A_{(2\mu-3)}x^{(2\mu-3)}+A_{(2\mu-4)}x^{(2\mu-4)}+\cdots+A_1x+A_0}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{\mu-1}}\right)$$

integrant:

$$\int \frac{P(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^\mu} = \int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{A_{(2\mu-3)}x^{(2\mu-3)}+\cdots+A_1x+A_0}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{\mu-1}}$$

amb la qual cosa el cas d'arrels complexes múltiples es redueix al d'arrels complexes simples.

Exemple 14.3.3 (Arrels reals simples) *Calculeu*

$$\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$$

Com que el grau de $P(x)$ és més gran que el de $Q(x)$, primer efectuem la divisió dels polinomis i obtenim:

$$\frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x} = (x-2) - \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}$$

Ara resolem l'equació $x^3-x^2-2x=0$ i resulta que $\{2,0,-1\}$ són les seves tres arrels (reals simples). Per tant, la descomposició en fraccions simples ens queda:

$$\frac{7x+2}{x^3-x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

Si igualem els numeradors de les dues fraccions tenim:

$$7x+2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

d'on igualant els coeficients dels dos polinomis obtenim el sistema

$$\begin{cases} 0 = A+B+C \\ 7 = -A+B-2C \\ 2 = -2A \end{cases}$$

amb solucions:

$$A=-1,\ B=\frac{8}{3},\ C=-\frac{5}{3}$$

Per tant,

$$\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int (x-2)dx - \int \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}dx =$$

$$= \int (x-2)dx + 1\int \frac{1}{x}dx - \frac{8}{3}\int \frac{1}{x-2}dx + \frac{5}{3}\frac{1}{x+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| - \frac{8}{3}\ln|x-2| + \frac{5}{3}\ln|x+1| + C$$

Amb MAPLE obtenim el mateix resultat (excepte els valors absoluts del logaritme neperià):

```
> int((x^4-3*x^3-3*x-2)/(x^3-x^2-2*x),x);
```

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln(x) + \frac{5}{3}\ln(x+1) - \frac{8}{3}\ln(x-2)$$

Exemple 14.3.4 (Arrels reals múltiples) *Calculeu*

$$\int \frac{x+1}{x^5-4x^4+4x^3}dx$$

El denominador pot factoritzar-se com a $x^3(x-2)^2$, és a dir, les arrels són $x=0$ (triple) i $x=2$ (doble), per tant la descomposició en fraccions simples ens queda:

$$\frac{x+1}{x^5-4x^4+4x^3} = \frac{x+1}{x^3(x-2)^2} = \left[\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}\right]+\left[\frac{B_1}{x-2}+\frac{B_2}{(x-2)^2}\right]$$

Igualant les dues fraccions tenim:

$$x+1 = A_1x^2(x-2)^2+A_2x(x-2)^2+A_3(x-2)^2+B_1x^3(x-2)+B_2x^3$$

d'on, igualant termes, obtenim el sistema:

$$\begin{cases} 0 = A_1+B_1 \\ 0 = -4A_1+A_2-2B_1+B_2 \\ 0 = 4A_1-4A_2+A_3 \\ 1 = 4A_2-4A_3 \\ 1 = 4A_3 \end{cases}$$

Resolent el sistema obtenim:

$$A_1 = \frac{7}{16},\ A_2 = \frac{1}{2},\ A_3 = \frac{1}{4},\ B_1 = -\frac{7}{16},\ B_2 = \frac{3}{8}$$

Integrant:

$$\int \frac{x+1}{x^5-4x^4+4x^3} =$$

$$= A_1\int\frac{1}{x}dx+A_2\int\frac{1}{x^2}dx+A_3\int\frac{1}{x^3}dx+B_1\int\frac{1}{x-2}dx+B_2\int\frac{1}{(x-2)^2}dx =$$

$$= A_1\ln|x|+A_2(-\frac{1}{x})+A_3(-\frac{1}{2x^2})+B_1\ln|x-2|+B_2(-\frac{1}{x-2})+C$$

Per tant,

$$\int\frac{x+1}{x^5-4x^4+4x^3} = \frac{7}{16}\ln x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}-\frac{3}{8\,(x-2)}-\frac{7}{16}\ln|x-2|+C$$

Exemple 14.3.5 (Arrels complexes simples) *Calculeu*

$$\int\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx$$

Descomposem l'integrant en fraccions més simples:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}$$

per tant, $x = (Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)$ i resolent el sistema

$$\begin{cases} 0 = A+C \\ 1 = B-A \\ 0 = C-B \end{cases}$$

obtenim $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$

Així,

$$\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C$$

Exemple 14.3.6 (Arrels complexes simples) *Calculeu*

$$\int \frac{8x^2-37x+65}{x^3-6x^2+13x}dx$$

Les arrels del denominador són $x=0$ i $x=3\pm 2i$ fet pel qual la descomposició en fraccions simples ens queda:

$$\frac{8x^2-37x+65}{x^3-6x^2+13x} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{(x-3)^2+2^2}$$

Igualant les fraccions tenim:

$$8x^2-37x+65 = A(x^2-6x+13)+(Mx+N)x$$

d'on, igualant els coeficients del polinomi, obtenim el sistema:

$$\begin{cases} 8 = A+M \\ -37 = -6A+N \\ 65 = 13A \end{cases}$$

Amb solucions

$$A = 5,\ M = 3,\ N = -7$$

Integrant obtenim:

$$\int \frac{8x^2 - 37x + 65}{x^3 - 6x^2 + 13x} = 5\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|(x-3)^2 + 2^2| + \arctan\left(\frac{x-3}{2}\right) + C$$

Exemple 14.3.7 (Arrels complexes múltiples. Mètode d'Hermitte) *Calculeu*

$$\int \frac{2x+104}{(x+2)(x^2-2x+2)^2}dx$$

Les arrels del denominador són: $x = -2$ (simple), i $x = 1 \pm i$ (doble) ($\mu = 2$). Per tant, la descomposició en fraccions ens queda:

$$\frac{2x+104}{(x+2)[(x-1)^2+1]^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{Mx+N}{(x-1)^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{A_1x+A_0}{(x-1)^2+1}\right) =$$

$$\frac{A}{x+2} + \frac{Mx+N}{(x-1)^2+1} + \frac{[(x-1)^2+1]A_1 - 2(x-1)(A_1x+A_0)}{[(x-1)^2+1]^2}$$

Igualant els polinomis del numerador tenim:

$$\begin{aligned} 2x+104 &= A(x^2-2x+2)^2 + (Mx+N)(x+2)(x^2-2x+2) + \\ &\quad + [(x^2-2x+2)A_1 - 2(x-1)(A_1x+A_0)](x+2) \end{aligned}$$

Identificant coeficients i resolent el sistema

$$\begin{cases} 0 = A + M \\ 0 = -4A + N - A_1 \\ 0 = 8A - 2M - 2A_0 - 2A_1 \\ 2 = -8A + 4M - 2N + 2A_1 - 2A_0 \\ 104 = 4A + 4N + 4A_1 + 4A_0 \end{cases}$$

obtenim:

$$A = 1,\ M = -1,\ N = 20,\ A_1 = 16,\ A_0 = -11$$

Per tant,

$$\int \frac{2x+104}{(x+2)(x^2-2x+2)^2}dx = \int \frac{A}{x+2}dx + \int \frac{Mx+N}{(x-1)^2+1}dx + \frac{A_1x+A_0}{(x-1)^2+1} =$$

$$= \ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + 19\arctan(x-1) + \frac{16x-11}{x^2-2x+2} + C$$

Amb MAPLE obtenim:

```
> int((2*x+104)/((x+2)*(x^2-2*x+2)^2),x);
```

$$\ln(x+2)-\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)+19\arctan(x-1)-\frac{1}{2}\frac{-32x+22}{x^2-2x+2}$$

Amb INTEGRATOR obtenim un resultat equivalent:

$$\frac{-11+16x}{2-2x+x^2}-19\arctan[1-x]+\log[x+2]-\frac{1}{2}\log[x^2-2x+2]$$

El següent exemple té interès perquè es tracta d'una integral d'una funció racional amb el polinomi del denominador no normalitzat, és a dir, amb coeficient del terme que dóna el grau del polinomi diferent de 1.

En aquest exemple també veurem una forma diferent de la que hem utilitzat en els exemples anteriors per trobar la descomposició de fraccions. En lloc de resoldre el sistema d'equacions que resulta de la igualtat de polinomis, els coeficients es poden trobar donant diferents valors a la incògnita x.

Exemple 14.3.8 *Calculeu*

$$\int \frac{7x+2}{4x^2-4x+1}dx$$

$$\int \frac{7x+2}{4x^2-4x+1}dx=\frac{1}{4}\int \frac{7x+2}{(x-\frac{1}{2})^2}dx$$

Per tant, podem fer la descomposició

$$\frac{7x+2}{(x-\frac{1}{2})^2}=\frac{A}{x-\frac{1}{2}}+\frac{B}{(x-\frac{1}{2})^2}=\frac{A(x-\frac{1}{2})+B}{(x-\frac{1}{2})^2}$$

i igualant numeradors tenim

$$7x+2=A(x-\frac{1}{2})+B$$

$$\text{Per}\quad x=\tfrac{1}{2}\quad \text{tenim}\quad \tfrac{7}{2}+2=B\Rightarrow B=\tfrac{11}{2}$$

$$\text{Per}\quad x=0\quad \text{tenim}\quad 2=A(-\tfrac{1}{2})+\tfrac{11}{2}\Rightarrow A=7$$

Així doncs:

$$\begin{aligned}\int \frac{7x+2}{4x^2-4x+1}dx &= \frac{1}{4}\left[\int \frac{7}{x-\frac{1}{2}}dx+\int \frac{\frac{11}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2}dx\right]=\\ &= \frac{7}{4}\ln|x-\frac{1}{2}|-\frac{11}{8}\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+C\end{aligned}$$

Amb MAPLE obtenim el mateix resultat:

```
> int((7*x+2)/(4*x^2-4*x+1),x);
```

$$-\frac{11}{4}\,\frac{1}{2x-1}+\frac{7}{4}\ln(2x-1)$$

WIRIS ens proporciona el resultat que veiem a la figura.

$$\int \frac{7x+2}{4x^2-4x+1} \rightarrow \frac{7}{4}\cdot\ln(|2\cdot x-1|)+\frac{-11}{8\cdot x-4}$$

Amb INTEGRATOR obtenim un resultat equivalent:

$$-\frac{11}{4(-1+2x)}+\frac{7}{4}\log[-1+2x]$$

14.4 Integrals trigonomètriques

En la integració de funcions trigonomètriques, poden utilitzar-se els dos mètodes que ja s'han vist (parts i substitució), els quals ens poden portar bé directament a la primitiva buscada, bé a una integral més senzilla (racional, per exemple). Per aplicar aquests mètodes pot ser útil transformar encertadament la funció a integrar utilitzant algunes de les relacions trigonomètriques que es coneixen. Algunes d'aquestes relacions són:

$$\begin{aligned}
\cos^2 a+\sin^2 a &= 1\\
\sin(a\pm b) &= \sin a\cos b\pm\cos a\sin b\\
\cos(a\pm b) &= \cos a\cos b\mp\sin a\sin b\\
\cos 2a &= \cos^2 a-\sin^2 a\\
\sin 2a &= 2\sin a\cos a\\
\sin^2 a &= \frac{1-\cos 2a}{2}\\
\cos^2 a &= \frac{1+\cos 2a}{2}\\
\sin a\cos b &= \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]\\
\sin a\sin b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]\\
\cos a\cos b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\frac{a}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos a}\\
\cos\frac{a}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\cos a}\\
\tan\frac{a}{2} &= \frac{\sqrt{1-\cos a}}{\sqrt{1+\cos a}}
\end{aligned}$$

Exemple 14.4.1

$$\int \cos^2(3x)dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 6x)dx = \frac{1}{2}(x+\frac{1}{6}\sin 6x)+C$$

Exemple 14.4.2

$$\int \sin^2 x\cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2(2x))dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

14.4.1 Integrals trigonomètriques racionals

S'anomenen les integrals del tipus $\int R(\cos x, \sin x)dx$ amb R fracció racional en $\sin x$ i $\cos x$. D'una manera general, es pot aplicar el canvi $t = \tan\frac{x}{2}$, ja que

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \text{ i } \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

i es té que

$$x = 2\arctan t \text{ i } dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

i s'aconsegueix una reducció a la integració d'una funció racional. En els casos particulars:

1. $R(\cos x, \sin x) = -R(\cos x, -\sin x)$ fer el canvi de variable

   $$t = \cos x$$

   amb la qual cosa tindrem que: $\sin x = \sqrt{1-t^2}$ i $dt = -\sqrt{1-t^2}dx$

2. $R(\cos x, \sin x) = -R(-\cos x, \sin x)$ fer el canvi de variable

$$t = \sin x$$

amb la qual cosa tindrem que: $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ i $dt = \sqrt{1-t^2}dx$

3. $R(\cos x, \sin x) = R(-\cos x, \sin x)$ fer el canvi de variable

$$t = \tan x$$

amb la qual cosa tindrem que: $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ i $dt = (1+t^2)dx$

Exemple 14.4.3

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x}dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^7 x}dx = \int \frac{1-t^2}{t^7}dt =$$

$$= -\frac{1}{6t^6} + \frac{1}{4t^4} + C = -\frac{1}{6\sin^6 x} + \frac{1}{4\sin^4 x} + C$$

(canvi: $t = \sin x$)

Exemple 14.4.4

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\cos x+\sin x}dx &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt = \\
&= \int \frac{2}{1+t^2+2t+1-t^2}dt = \int \frac{1}{1+t}dt = \\
&= \ln|1+t| + C = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C
\end{aligned}$$

(canvi: $t = \tan\frac{x}{2}$)

14.5 Integrals hiperbòliques

Tots els mètodes per a integrals trigonomètriques es poden adaptar fàcilment per a integrals hiperbòliques. A continuació es detallen algunes transformacions útils i es resolen alguns exemples:

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\
\sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\
\sinh 2x &= 2\sinh x \cosh x \\
\cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\
\sinh^2 x &= \frac{\cosh 2x - 1}{2} \\
\cosh^2 x &= \frac{1+\cosh 2x}{2} \\
\sinh x \sinh y &= \frac{1}{2}[\cosh(x+y) - \cosh(x-y)] \\
\sinh x \cosh y &= \frac{1}{2}[\sinh(x+y) + \sinh(x-y)] \\
\cosh x \cosh y &= \frac{1}{2}[\cosh(x+y) + \cosh(x-y)]
\end{aligned}$$

Exemple 14.5.1

$$\begin{aligned}
\int \sinh(7x-2)\sinh(5x+1)dx &= \frac{1}{2}\int [\cosh(12x-1) - \cosh(2x-3)]dx = \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}\sinh(12x-1) - \frac{1}{2}\sinh(2x-3)\right] = \\
&= \frac{1}{24}\sinh(12x-1) - \frac{1}{4}\sinh(2x-3) + C
\end{aligned}$$

ja que

$$\sinh a \sinh b = \frac{1}{2}[\cosh(a+b) - \cosh(a-b)]$$

Exemple 14.5.2 *Calculeu*

$$\int \frac{1}{1+2\sinh^2 x}dx$$

Aquesta integral és del tipus $R(\cosh x, \sinh x) = R(-\cosh x, -\sinh x)$, per tant, fem el canvi: $t = \tanh x$ que ens porta a $\sinh x = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, $\cosh x = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ i $dt = (1-t^2)dx$ i obtenim que:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+2\sinh^2 x}dx &= \int \frac{\frac{1}{1-t^2}}{1+2\frac{t^2}{1-t^2}}dt = \int \frac{1}{1+t^2}dt = \\
= \arctan t + C &= \arctan(\tanh x) + C
\end{aligned}$$

Amb INTEGRATOR obtenim mateix resultat, com es pot veure a la figura.

14.6 Integrals irracionals

Molts tipus de funcions irracionals es redueixen a racionals mitjançant canvis de variable encertats. A continuació veurem alguns casos que s'han inclòs al llibre, no tant perquè pensem que sigui indispensable conèixer-los, sinó per fer veure la importància del mètode del canvi de variable en el càlcul de primitives.

14.6.1 Integrals bilineals

Són integrals de la forma:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right) dx$$

on R és una funció racional. Suposarem que les fraccions $\frac{p_1}{q_1}, \cdots, \frac{p_k}{q_k}$ són irreduïbles. Es redueix a una integral racional mitjançant el canvi

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{con } n = \text{m.c.m.}(q_1, \cdots, q_k)$$

Exemple 14.6.1

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}dx = \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt =$$

$$= 6\int \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+C =$$

$$= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C$$

(canvi: $x=t^6$)

Amb WIRIS obtenim

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \rightarrow -6\cdot\ln(|-\sqrt[6]{x}-1|)+\left(2\cdot\sqrt[6]{x}^{\,3}-3\cdot\sqrt[6]{x}^{\,2}\right)+6\cdot\sqrt[6]{x}$$

14.6.2 Integrals binomials

Són integrals del tipus

$$\int x^p(ax^q+b)^r dx \quad (a,b\in\mathbb{R},\ p,q,r\in\mathbb{Q})$$

Aquestes integrals es poden simplificar fent la substitució

$$ax^q = by$$

perquè es passa a una integral de la forma

$$\int y^s(1+y)^r dy \quad (s,r\in\mathbb{Q})$$

Hi ha tres casos en què, per substitució, aquesta nova integral admet reducció a una forma elemental d'integració:

1. Si $r\in\mathbb{Z}$, fent el canvi $y=t^m$, on m és el denominador de s.
2. Si $s\in\mathbb{Z}$, fent el canvi $1+y=t^n$, on n és el denominador de r.
3. Si $s+r\in\mathbb{Z}$, fent el canvi $1+y^{-1}=t^n$, on n és el denominador de r.

Exemple 14.6.2 *Calculeu*

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}dx &= 2\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt = \arctan t-\frac{t}{t^2+1}+C = \\ &= \arctan\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{x+1}+C\end{aligned}$$

(canvi $x=t^2$)

Exemple 14.6.3 *Calculeu*

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{(2+x^2)^3}}dx$$

Fent el canvi $x^2 = 2y$ es transforma en $\frac{1}{2}\int \sqrt{y}(1+y)^{-3/2}dy$ que podem resoldre amb el canvi $1+y^{-1} = t^2$.

Comproveu que

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{(2+x^2)^3}}dx = \frac{-x}{\sqrt{x^2+2}} + \ln|x+\sqrt{x^2+2}| + C$$

Amb MAPLE obtenim un resultat diferent però equivalent:

```
> int(x^2/((2+x^2)^(3/2)),x);
```

$$-\frac{x}{\sqrt{2+x^2}} + \operatorname{argsinh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)$$

Amb INTEGRATOR obtenim el mateix que amb MAPLE.

14.6.3 Integrals irracionals particulars

Els tres primers tipus d'integrals que estudiarem són interessants de saber resoldre perquè apareixen moltes vegades en el càlcul d'àrees o volums de problemes geomètrics. Per exemple, calculeu l'àrea de la regió del pla limitada per les corbes $y = x^2$ i $x^2 + y^2 = 2$. (Aquest problema i d'altres de semblants els trobareu resolts a la referència [13].)

1. $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$ es resol fent el canvi de variable

   $$x = a\sin t \text{ o bé } x = a\tanh t$$

2. $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$ es resol fent el canvi de variable

   $$x = a\sec t \text{ o bé } x = a\cosh t$$

3. $\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})dx$ es resol fent el canvi de variable

   $$x = a\tan t \text{ o bé } x = a\sinh t$$

   Exemple 14.6.4

   $$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx = \int \frac{1}{\sin t\cos^2 t}dt = \sqrt{x^2+1} - \operatorname{argtanh}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C$$

   (canvi: $x = \tan t$)

4. Integrals del tipus $\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

   Hi ha un mètode anomenat *alemany*, que resol integrals del tipus

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

   essent $p(x)$ un polinomi, i consisteix a trobar un polinomi $q(x)$ amb coeficients indeterminats i tal que $gr[q(x)] < gr[p(x)]$ que compleixi

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Exemple 14.6.5 *Resoleu*

$$\int \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx$$

Apliquem el mètode alemany i tenim

$$\int \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx = (ax+b)\sqrt{x^2+2x+4} + k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$$

Per trobar les constants a, b, k derivem i obtenim:

$$\frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+4}} = a\sqrt{x^2+2x+4} + (ax+b)\frac{(2x+2)}{2\sqrt{x^2+2x+4}} + \frac{k}{\sqrt{x^2+2x+4}}$$

$$\frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+4}} = \frac{a(x^2+2x+4)+(ax+b)(x+1)+k}{\sqrt{x^2+2x+4}}$$

igualant tenim: $\quad a = \frac{3}{2} \quad b = -\frac{9}{2} \quad k = -\frac{1}{2}$

Ara el problema es redueix a calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$

Com que $x^2+2x+4 = (x+1)^2+3$ podem escriure

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} =$$

$$= \operatorname{argsinh}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Ens queda

$$\int \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx = \left(\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+4} - \frac{1}{2}\operatorname{argsinh}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

5. Les integrals del tipus

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^n \sqrt{px^2+qx+r}}$$

es poden reduir a integrals on es pot aplicar el mètode alemany considerant el canvi de variable $ax+b=\frac{1}{t}$.

Per consolidar el càlcul de primitives podeu anar a la pàgina
`http://www.wiris.net/upc.edu/collection`

A Àlgebra

En aquest apèndix trobareu les definicions d'anell i cos perquè aquests conceptes han aparegut al llibre. Es defineixen les matrius i determinants com a eines bàsiques de les matemàtiques i es tracta la resolució de sistemes lineals.

A.1 Estructures fonamentals

A.1.1 Estructures amb una operació interna. Grups

Definició A.1.1 (*Grup*) *Donat un conjunt $G \neq 0$ amb una operació interna que denotarem per $*$, s'anomena* **grup** *la parella $(G,*)$, si l'operació $*$ compleix les propietats:*

1. *Associativa*

$$\forall x,y,z \in G \quad x*(y*z) = (x*y)*z$$

2. *Existència d'element neutre*

$$\forall x \in G \quad \exists e \in G \quad \textit{tal que} \quad x*e = e*x = x$$

3. *Existència d'element simètric (o invers)*

$$\forall x \in G \quad \exists x^{-1} \in G \quad \textit{tal que} \quad x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$$

Si, a més a més, es compleix la propietat commutativa

$$\forall x,y \in G \quad x*y = y*x$$

direm que el grup és **commutatiu** *o* **abelià**.

Exemple A.1.1

1. $(\mathbb{N},+)$ no és grup perquè no existeix l'element simètric $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $(\mathbb{Z},+)$ és un grup commutatiu.
3. $(\mathbb{Z},\cdot)$ no és un grup perquè no existeix l'invers $\forall z \in \mathbb{Z}$.
4. $(\mathbb{R},+)$ és un grup commutatiu.

5. $(\mathbb{R},\cdot)$ no és un grup perquè el nombre 0 no té invers.
6. $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$ és un grup commutatiu.

A.1.2 Estructures amb dues operacions. Anells i cossos

Definició A.1.2 (*Anell*) *Sigui A un conjunt amb dues operacions $+$ i $\cdot$. La terna $(A,+,\cdot)$ s'anomena* **anell** *si es compleix:*

1. *$(A,+)$ és un grup commutatiu.*
2. *L'operació $\cdot$ és associativa:*

$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c) \quad \forall a,b,c \in A$$

3. *L'operació $\cdot$ és distributiva respecte de la suma:*

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad \forall a,b,c \in A$$
$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \quad \forall a,b,c \in A$$

A més a més,

- *Si A té element neutre per $\cdot$ direm que l'anell $(A,+,\cdot)$ és* **unitari***.*
- *Si l'operació $\cdot$ és commutativa, direm que l'anell $(A,+,\cdot)$ és* **commutatiu***.*

Exemple A.1.2

1. $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ El conjunt de nombres enters amb les operacions suma i producte té estructura d'anell commutatiu.
2. $\mathbb{R}[x]$ Els polinomis tenen estructura d'anell sobre $\mathbb{R}$.

Definició A.1.3 (*Cos*) *Donat un anell unitari $(A,+,\cdot)$ tal que cada element diferent de l'element neutre del grup $(A,+)$ té simètric respecte de la segona operació $\cdot$, direm que la terna $(A,+,\cdot)$ és un* **cos***.*

Si l'anell unitari és a més a més commutatiu direm que el **cos** *és* **commutatiu***.*

Exemple A.1.3

1. $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ El conjunt dels nombres racionals té estructura de cos commutatiu amb les operacions internes:

$$\text{suma} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\text{producte} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

2. $(\mathbb{R},+,\cdot)$ El conjunt dels nombres reals té estructura de cos commutatiu amb les operacions suma i producte.
3. $(\mathbb{C},+,\cdot)$ El conjunt dels nombres complexos té estructura de cos commutatiu amb les operacions de suma i producte (vegeu capítol 7).

A.2 Matrius i determinants

A.2.1 Matrius

Definició A.2.1 (*Matriu*) *Un conjunt d'elements d'un cos commutatiu* $\mathbb{K}$*, escrits en* m *files i* n *columnes, s'anomena* matriu *de* m *files i* n *columnes.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Direm que $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ *(*A *és una matriu del tipus* $m \times n$ *amb coeficients a* $\mathbb{K}$*). A partir d'ara considerarem matrius de nombres reals i farem servir la notació* $A \in M_{m\times n}$*.*

Definició A.2.2 (*Operacions*) *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *i* A *i* B *són matrius de coeficients reals, del tipus*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

llavors,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si $A \in M_{m\times n}$ *i* $B \in M_{n\times p}$*, aleshores, podem calcular la matriu producte* AB *de la forma següent:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

essent

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Recordem que el producte de matrius no és commutatiu, és a dir, AB no té perquè coincidir amb BA. És més, a vegades, encara que AB existeixi, pot no tenir sentit parlar de BA (a causa del nombre de files i columnes de les matrius que estem operant).

Exemple A.2.1 *Calculeu AB essent* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ *i* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 22 \\ 13 & 32 \end{pmatrix}$$

Definició A.2.3 (*Matriu transposada*) *Si $A \in M_{m\times n}$, direm A^T a la seva matriu* **transposada** *obtinguda canviant files per columnes.*

Definició A.2.4 (*Matriu inversa i matriu identitat*) *Donada $A \in M_{m\times n}$, direm que A^{-1} és la seva matriu* **inversa** *si es compleix que*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = Id$$

essent Id la **matriu identitat**

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propietat A.2.1 *Es compleixen les propietats següents:*

1. *Si $A, B \in M_{m\times n}$ tenen inversa, aleshores el producte AB també té inversa i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*
2. *Si $A \in M_{m\times n}$ té inversa, aleshores la seva matriu transposada també té inversa i es compleix que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$*

A.2.2 Determinants

Definició A.2.5 (*Determinant*) *Un* **determinant** *és una aplicació que assigna un nombre a cada matriu quadrada. A aquest nombre (real, si treballem amb matrius amb coeficients reals) també se l'anomena determinant, i escriurem $det(A)$ o bé $|A|$. Si tenim la matriu donada de forma explícita*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Propietat A.2.2 (*Càlcul de determinants. Regla de Sarrus*)

$$|a_{11}| = a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Exemple A.2.2

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

El càlcul de determinants per a matrius d'ordre superior a tres és més complicat, llevat de casos particulars.

Propietat A.2.3 (*Càlcul de determinants per a matrius particulars*)

1. *Matriu diagonal*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(*la matriu identitat* $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *és un cas particular, per tant,* $|Id| = 1$)

2. *Matrius triangulars*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Ja hem comentat que el càlcul d'un determinant concret pot ser laboriós, però els determinants tenen moltes propietats que poden ajudar a reduir la dificultat d'aquest càlcul.

Propietat A.2.4 (*Propietats dels determinants*) *Si* $A \in M_{n\times n}$ *i* $B \in M_{n\times n}$

1. *Un determinant amb dues columnes iguals val zero.*
2. *Al canviar dues columnes d'un determinant, aleshores el determinant canvia de signe.*
3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \overset{i)}{a_{1i}+c_{1i}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+c_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+c_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{i)}{a_{1i}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{i)}{c_{1i}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4. *Si es multiplica una columna del determinant per $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores el determinant queda multiplicat per λ.*
5. *Un determinant val zero si els elements d'una fila o bé columna són tots iguals a zero.*
6. $det(AB) = det(A)det(B)$
7. $det(A) = det(A^T)$
8. *Si A és invertible,* $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

Exemple A.2.3 *Penseu si es compleix* $det(A+B) = det(A) + det(B)$.

Aquesta igualtat és falsa, en general, $det(A+B) \neq det(A) + det(B)$. Considerem per exemple les matrius

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Observem que

$$detA = 1,\ \ detB = -12 \quad i \quad det(A+B) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -17 \neq 1 - 12$$

Els determinants són una eina molt útil per resoldre problemes importants, com són el càlcul de la matriu inversa (tot i que hi ha altres mètodes, per exemple el mètode de Gauss) i la resolució de sistemes d'equacions lineals.

Propietat A.2.5 *Una matriu quadrada A és invertible (admet inversa) si, i només si,* $det A \neq 0$.

Definició A.2.6 *(Matriu adjunta) Suposem que*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

és una matriu invertible. Aleshores definim la **matriu adjunta** *de A*

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

essent A_{ij} l'adjunt de a_{ij} de A. Es defineix el **menor adjunt** *(o* **adjunt***) A_{ij} de l'element a_{ij} com a*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

essent M_{ij} el **menor complementari** *d'un element a_{ij} de A i que es defineix com el determinant de la matriu que s'obté de A suprimint la fila i i la columna j.*

Exemple A.2.4 *Calculeu $Adj(A)$ essent* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

En el nostre cas

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Per tant,

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Propietat A.2.6 (*Càlcul de la matriu inversa utilitzant determinants*) *Si A és una matriu invertible, aleshores*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A^T)$$

Exemple A.2.5 *Calculeu* A^{-1}, *essent* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *i comproveu que* $AA^{-1} = Id$

$$det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 + 3 = 9$$

$$Adj(A^T) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

aleshores,

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

Comprovem-ho:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/9 & 1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A.3 Sistemes d'equacions lineals

Donat el sistema d'equacions lineals, és interessant determinar si el sistema admet solució o no i conèixer mètodes per trobar-ne la solució.

El teorema de Rouché-Frobenius proporciona un criteri general per determinar la compatibilitat (existència de solució) o incompatibilitat d'un sistema. I pel que fa a l'obtenció de solucions de sistemes d'equacions lineals, hi ha diversos procediments. Dos d'ells son la regla de Cramer i el mètode de reducció o eliminació de Gauss.

Definició A.3.1 (*Rang d'una matriu*) *El* rang *d'una matriu A és l'ordre màxim de les matrius quadrades que es poden treure de A, amb determinant diferent de zero.*

Definició A.3.2 (*Sistema d'equacions lineals*) *S'anomena sistema de m equacions lineals amb n incògnites una expressió del tipus*

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \dots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

on als elements $a_{ij} \in \mathbb{R}$ se'ls anomena coeficients del sistema, $x_1, \dots, x_n$ són les incògnites del sistema i $b_1, \dots, b_m$ són els termes independents. Anomenem solució del sistema els valors que podem assignar a les incògnites $x_1, \dots, x_n$ de forma que es compleixin totes les igualtats a la vegada.

El sistema es pot escriure matricialment com a $Ax = b$ essent

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A s'anomena matriu del sistema i A_b és la matriu ampliada del sistema,

$$A_b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Definició A.3.3 (*Sistemes compatibles*) *Direm que un sistema d'equacions lineals és* compatible *quan tingui solució. Direm que és* compatible determinat *quan tingui solució única, i* compatible indeterminat *si té més d'una solució. Direm que el sistema és* incompatible *quan no tingui cap solució.*

Teorema A.3.1 (*Teorema de Rouché-Frobenius*) *Donat un sistema d'equacions lineals $Ax = b$, aleshores,*

1. *Si $\text{rang}\, A \neq \text{rang}\, A_b$ el sistema és incompatible*
2. *Si $\text{rang}\, A = \text{rang}\, A_b = r$ el sistema és compatible,*
   a) *determinat si $r = n$ (nombre d'incògnites)*
   b) *indeterminat si $r < n$*

Exemple A.3.1

El sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+5z=0 \\ x+y-3z=-2 \end{array}\right\}$$

és compatible indeterminat perquè

$$rang\,A = rang\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 2$$

$$rang\,A_b = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) = 2$$

En cas de tenir un sistema compatible determinat, donarem un mètode de resolució anomenat regla de Cramer.

Propietat A.3.1 (*Regla de Cramer*) *Si tenim un sistema d'equacions lineals* $Ax = b$ *que té el mateix nombre d'equacions que d'incògnites, i tal que* $det\,A \neq 0$*, aleshores el sistema*

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right\}$$

té solució única que ve donada per

$$x_i = \frac{det M_i}{det\,A} \quad \forall i \;\; 1 \leq i \leq n$$

essent M_i *la matriu que s'obté substituint la colunmna i-èsima de la matriu del sistema per la columna* b *de termes independents.*

Exemple A.3.2 *Resoleu el sistema*

$$\left.\begin{array}{r} x-y-2z=-1 \\ 2x-3y+4z=4 \\ 5x-y+3z=16 \end{array}\right\}$$

aplicant la regla de Cramer.

La matriu associada al sistema és

$$A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{array}\right)$$

i la matriu A té determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -45 \neq 0$$

Com que $det A \neq 0$, el sistema té solució única que ve donada per

$$x = \frac{det M_1}{det A} \quad y = \frac{det M_2}{det A} \quad z = \frac{det M_3}{det A}$$

amb

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 16 & -1 & 3 \end{pmatrix} \; M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 5 & 16 & 3 \end{pmatrix} \; M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 16 \end{pmatrix}$$

que tenen determinants

$$|M_1| = -135 \quad |M_2| = -90 \quad |M_3| = -45$$

Així, doncs,

$$x = \frac{-135}{-45} = 3 \quad y = \frac{-90}{-45} = 2 \quad z = \frac{-45}{-45} = 1$$

Per tant, la solució del sistema és

$$x = 3, \quad y = 2, \quad z = 1$$

Un altre mètode de resolució de sistemes lineals és el mètode de Gauss. Amb aquest mètode s'aconsegueix una eliminació d'incògnites i l'element que fem servir per aconseguir l'eliminació de cada incògnita s'anomena pivot.

Definició A.3.4 (*Transformacions elementals de fila* (*columna*)) *A les transformacions elementals que només permuten, multipliquen o substitueixen files (columnes) se les anomenen transformacions elementals de fila* (*columna*)*. Les transformacions anomenades elementals són:*

1. *Permutar files o columnes, entre si.*
2. *Multiplicar una fila, o columna, per un escalar no nul.*
3. *Substituir una fila, o columna, per una combinació lineal no nul·la d'aquesta i les restants.*

Propietat A.3.2 (*Mètode de Gauss*) *Donat un sistema compatible* ($rang A = rang A_b = r$) *d'equacions lineals*

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \dots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

el mètode de Gauss consisteix a obtenir a partir de la matriu A_b

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

mitjançant transformacions elementals de fila i columna, una matriu del tipus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & c_{1,n+1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & c_{2,n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & c_{r,n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

equivalent al sistema

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 & & & = c_{1,n+1} - c_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{1n}x_n \\ & x_2 & & = c_{2,n+1} - c_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{2n}x_n \\ & & \ddots & = \qquad\qquad \vdots \\ & & x_r & = c_{r,n+1} - c_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{rn}x_n \end{array}\right\}$$

que té solució immediata, al donar valor a les incògnites $x_{r+1}, \ldots, x_n$

Exemple A.3.3 *Resoldre el sistema*

$$\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 5x - y + 3z = 16 \end{array}\right\}$$

aplicant el mètode de Gauss.

La matriu associada al sistema és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{array}\right)$$

Eliminar x de la segona i tercera equació és el mateix que fer zeros els coeficients 2 i 5 de la primera columna. Això s'obté sumant a la segona fila la primera columna multiplicada per -2, i a la tercera, la primera multiplicada per -5.

Així, doncs,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 13 & 21 \end{array}\right)$$

Ara per fer zero el 4 de la tercera fila sumem a la tercera fila la segona multiplicada per 4 i obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 45 & 45 \end{array}\right)$$

que té sistema associat

$$\left.\begin{array}{r} x-y-2z=-1 \\ -y+8z=6 \\ 45z=45 \end{array}\right\}$$

De la tercera fila resulta $z=1$, i substituint aquest valor a la segona, tenim que $y=2$. Finalment, de la primera fila resulta $x=3$, per tant, aquest sistema és compatible determinat amb solució única

$$x=3, \quad y=2, \quad z=1$$

Propietat A.3.3 (*Mètode per obtenir la matriu inversa*) *Si $A \in M_{m\times n}$ és una matriu quadrada invertible, aleshores un mètode per calcular A^{-1} consisteix a:*

1. *Escriure la matriu*

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

2. *Aplicar transformacions elementals de fila fins a arribar a una matriu del tipus*

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

Aleshores, la inversa de A, A^{-1} és la matriu

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple A.3.4 *Calculeu A^{-1}, essent* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Donada la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

sumem a la segona fila la primera multiplicada per -2, i a la tercera la primera. Així, doncs,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sumem a la tercera fila la segona multiplicada per -1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

i la dividim entre 9

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/9 & 1/9 \end{array}\right)$$

Sumem a la primera fila la tercera multiplicada per -3, i a la segona la tercera multiplicada per 6, i obtenim ja el resultat desitjat.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/9 & 1/9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/9 & 1/9 \end{array}\right)$$

Així, doncs, A^{-1} s'escriu com a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & -2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

Per consolidar els conceptes d'àlgebra podeu treballar amb la pàgina
`http://www.wiris.net/upc.edu/collection`

B Estadística

Una estadística és un conjunt de dades numèriques presentades en forma de taules o gràfics i el seu aspecte més important és l'obtenció de conclusions a partir de dades experimentals. Aquest procés s'anomena *inferència estadística* i com que l'estadística té el seu origen en l'observació i descripció de les col·lectivitats humanes, el conjunt de referència objecte d'estudi sovint s'anomena *població*, i cada element del conjunt s'anomena *individu*.

B.1 Descripció gràfica de les dades

Una vegada recollides les dades necessàries, s'han d'ordenar i expressar d'una manera fàcil de llegir i interpretar. Si la població és molt nombrosa, es consideren subconjunts que s'anomenen *classes*. Aquestes classes han de ser disjuntes, de manera que no hi hagi ambigüitat al decidir a quina classe pertany una observació particular. Els conceptes següents ajuden a fer aquesta interpretació.

Definició B.1.1 (*Freqüència absoluta*) *La freqüència absoluta és el nombre de vegades que es presenta una classe o valor.*

Si anomenem n_i la freqüència absoluta de x_i, i N és el nombre d'individus de la població, es compleix que

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_p = N$$

és a dir, la suma de les freqüències absolutes és el nombre d'individus de la població.

Sovint, la freqüència absoluta no és prou significativa. Per exemple, si tenim una classe de 50 alumnes on n'hi ha 10 que han obtingut un 5, això no vol dir el mateix que si hi ha 10 estudiants que tenen un 5 en una classe de 25. Es per això que s'introdueix la freqüència relativa.

Definició B.1.2 (*Freqüència relativa*) *La freqüència relativa d'un element x_i amb freqüència absoluta n_i és el quocient entre la freqüència absoluta i el nombre total d'observacions.*

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

Moltes vegades la freqüència relativa s'expressa en percentatge i per fer-ho es multiplica la freqüència relativa per 100%; així, una freqüència relativa de $\frac{7}{50}$ equival en percentatge a un 14%, perquè $\frac{7}{50}.100\% = 14\%$ (entenem que $100\% = \frac{100}{100}$)

Propietat B.1.1 *La freqüència relativa compleix que*

1. $0 \leq f_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, p$
2. $f_1 + f_2 + \ldots + f_p = 1$ *(és a dir, la suma de totes les freqüències relatives d'una mostra és igual a 1)*

Hi ha diverses formes de representació gràfica de les dades d'una estadística; totes elles amb l'objectiu de simplificar i donar de forma clara i ràpida, sense deixar de banda la precisió, una visió de les dades.

1. El *diagrama de barres* reflecteix la freqüència absoluta de cada valor de la variable.
2. Un *polígon de freqüències* consisteix a assenyalar els punts (x_i, n_i) i unir-los mitjançant segments de recta.
3. Quan es volen comparar els diferents aspectes en què es reparteixen els individus d'una població, es fa servir un *gràfic de sectors*. Un cercle o semicercle es divideix en sectors d'àrea proporcional a la freqüència.

   Com es calcula l'angle α_i associat a una freqüència n_i? Si considerem un cercle, l'angle α_i compleix que

   $$\begin{array}{lcl} 360^\circ & \longrightarrow & \alpha_i \\ N & \longrightarrow & n_i \end{array}$$

   per tant,

   $$\frac{360^\circ}{N} = \frac{\alpha_i}{n_i} \Rightarrow \alpha_i = 360^\circ \frac{n_i}{N} = 360^\circ f_i$$

   d'on

   $$\alpha_i = 360^\circ f_i$$

4. Els *histogrames* estan formats per rectangles de bases iguals a les longituds de les classes i alçades iguals a les freqüències absolutes corresponents.

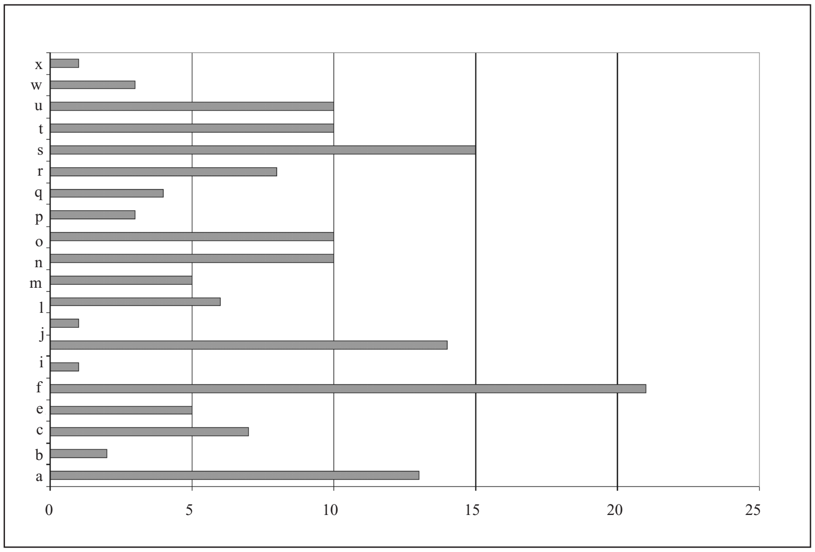


Fig. B.1 Diagrama de barres

Exemple B.1.1 *Del text següent,*

“Ceux qui sont férus de pratique sans posséder la science sont comme le pilote qui s’embarquerait sans timon ni boussole, et ne saurait jamais avec certitude où il va.”

Léonard de Vinci

compteu cada una de les lletres de l’abecedari que hi apareixen i representeu amb diagrames de barres i polígon de freqüències els resultats. Amb un gràfic de sectors representeu el tant per cent de vocals i consonants que apareixen al text i feu-ne un histograma agrupant les lletres de l’abecedari de cinc en cinc.

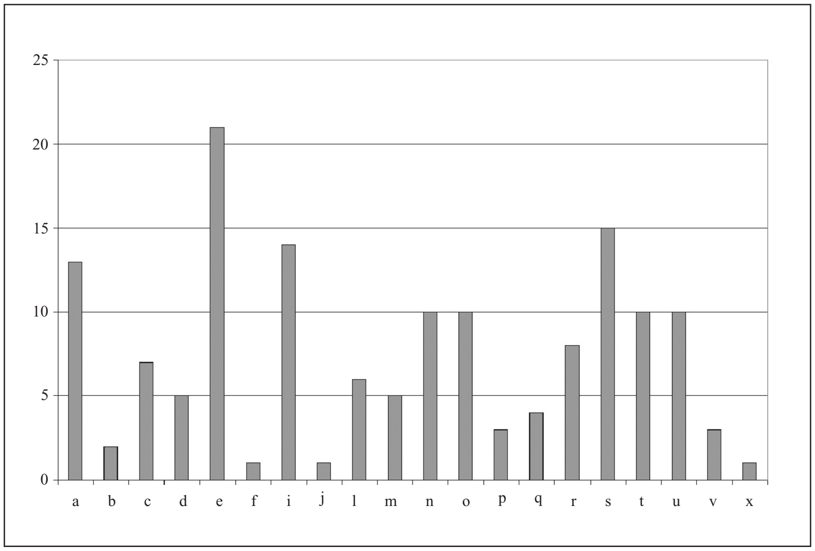


Fig. B.2 Diagrama de barres per columnes

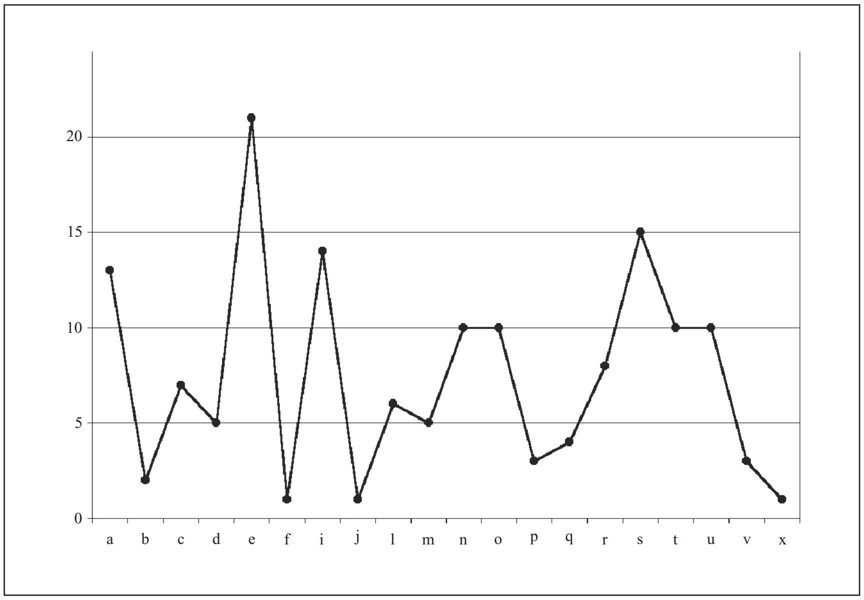


Fig. B.3 Polígon de freqüències

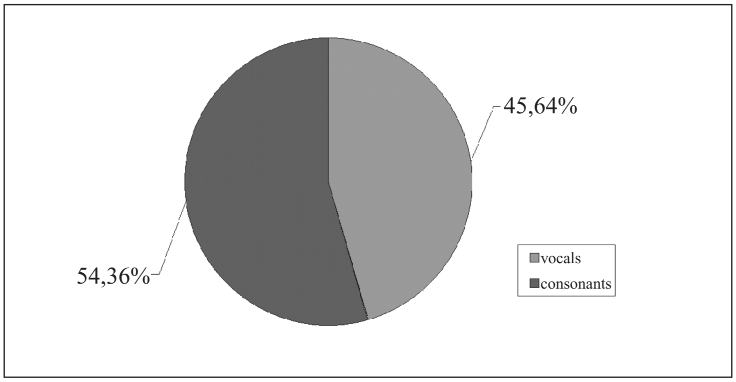


Fig. B.4 Gràfic de sectors

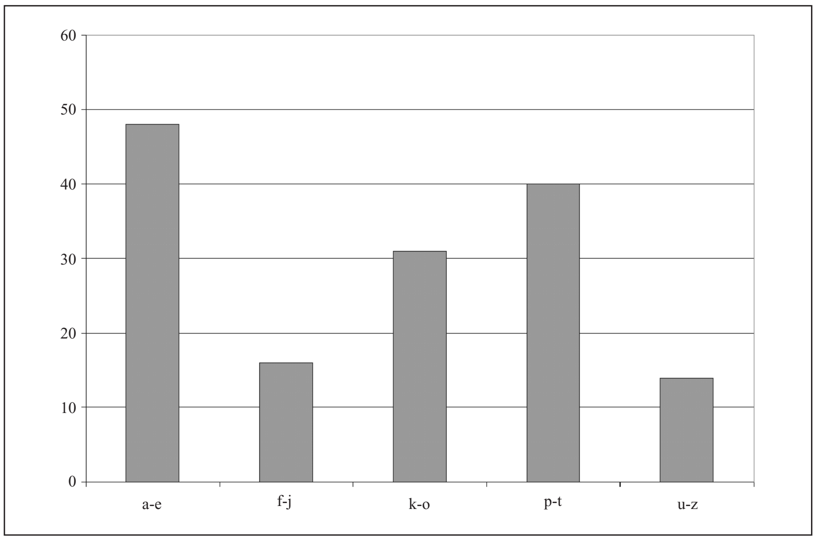


Fig. B.5 Histograma

Els gràfics que hem comentat fins ara són els més habituals, però n'hi ha d'altres, per exemple el següent:

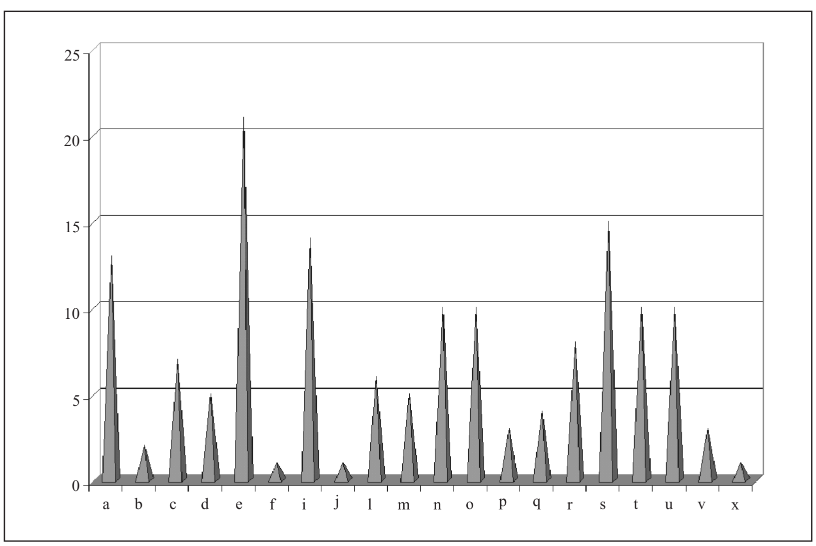


Fig. B.6 Diagrama piramidal

B.2 Mesures numèriques descriptives

A cada distribució estadística se li poden associar uns paràmetres que ens ajuden a descriure-la. Estudiarem els valors centrals, que ens donaran el centre de la distribució, i les mesures de dispersió que ens diran si les dades estan més o menys allunyades del centre.

B.2.1 Mesures de centralització

Els valors centrals més utilitzats són la moda, la mediana, la mitjana aritmètica i la mitjana geomètrica.

Definició B.2.1 (*Moda*) *La* **moda** *d'una distribució estadística és el valor que apareix més vegades, és a dir, el valor de freqüència absoluta més gran.*

Definició B.2.2 (*Mediana*) *La* **mediana** *és el valor de la variable tal que, una vegada ordenades les dades de forma creixent, té el mateix nombre de valors que el precedeixen i que el segueixen, és a dir, és el valor de posició central en el conjunt ordenat per la relació* $\leq$.

Observem que, si el nombre de dades és senar, la mediana coincideix amb una de les dades, però si és parell, es pren com a mediana el promig dels dos valors centrals. Per exemple, la mediana de les dades 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 és

$$\frac{5+6}{2} = 5.5$$

Definició B.2.3 (*Mitjana aritmètica*) *La* **mitjana aritmètica** *dels valors* $x_i \quad \forall i = 1, \ldots, N$ *és el valor* $\bar{x}$ *que es defineix*

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$$

o de forma més abreujada

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Definició B.2.4 (*Mitjana geomètrica*) *La* **mitjana geomètrica** *dels valors* $x_i \quad \forall i = 1, \ldots, N$ *és el valor que es defineix com a*

$$\sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_N}$$

o de forma més abreujada

$$\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i}$$

B.2.2 Mesures de variabilitat

Una mesura de posició central proporciona informació sobre un conjunt de dades, però no dóna cap idea de la dispersió d'aquestes dades en el conjunt. Per exemple, si considerem els dos conjunts de dades següents, cada un dels quals té quatre observacions: $0, 25, 75, 100; 48, 49, 51, 52$. Als dos conjunts la mitjana aritmètica val 50, encara que els dos conjunts són ben diferents, ja que en el primer cas les observacions són molt més disperses que en el segon cas. D'aquí l'interès de les mesures de variabilitat.

Definició B.2.5 (*Desviació*) *La desviació d'una observació respecte de la mitjana aritmètica, és la diferència entre el valor de la variable x d'aquesta observació i la mitjana aritmètica $\bar{x}$*

$$d = x - \bar{x}$$

Observem que $\sum_{i=1}^{N} d_i n_i = 0$, per tant, per estudiar la variabilitat d'una distribució hem de considerar la desviació prescindint del signe.

Les desviacions més usuals són la desviació típica i la variança.

Definició B.2.6 (*Variança*) *Per a distribucions amb un nombre petit d'observacions i de valors de la variable, es defineix la* **variança** *com a*

$$S_x^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_p - \bar{x})^2}{N}$$

i per a distribucions amb un nombre elevat d'observacions o bé d'un nombre elevat de valors diferents de la variable es defineix com a

$$S_x^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 n_2 + \ldots + (x_p - \bar{x})^2 n_p}{N}$$

(*essent* $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = N$).

Observem que la variança té en compte la suma de desviacions de cada observació elevada al quadrat. Això és per no tenir problemes amb el signe. S'ha comprovat que aquest valor és més representatiu de la dispersió que si es considera el valor absolut $|x_i - \bar{x}|$ en lloc de $(x_i - \bar{x})^2$.

Propietat B.2.1 *Per al càlcul de la variança s'acostuma a fer servir la fórmula següent*

$$S_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} x_i^2 n_i - \bar{x}^2$$

que és equivalent a

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} d_i{}^2 n_i$$

Definició B.2.7 (*Desviació típica*) *Es defineix la* **desviació típica** *com l'arrel quadrada de la variança, és a dir, S_x*

$$\sigma = \sqrt{S_x^2} = S_x$$

És interessant la interpretació de la desviació típica com a mesura de dispersió. Com més petita és la desviació típica, més petita és la separació dels valors respectius de la mitjana aritmètica, i per tant, més representativitat de la mitjana.

Exemple B.2.1

$$0, 25, 75, 100 \quad \sigma = \frac{25}{2}\sqrt{10} \cong 39{,}5$$

$$48, 49, 51, 52 \quad \sigma = \frac{\sqrt{10}}{2} \cong 1{,}6$$

Exemple B.2.2 *Del text de l'exemple B.1.1,*

"Ceux qui sont férus de pratique sans posséder la science sont comme le pilote qui s'embarquerait sans timon ni boussole, et ne saurait jamais avec certitude où il va."

Léonard de Vinci

calculeu la moda, mediana, mitjana aritmètica, mitjana geomètrica, variança i desviació típica de la distribució que relaciona les lletres del text amb la seva freqüència absoluta.

Les dades d'aquesta distribució són:

$$7,\ 21,\ 10,\ 1,\ 4,\ 14,\ 15,\ 10,\ 10,\ 10,\ 1,\ 8,\ 5,\ 3,\ 13,\ 6,\ 5,\ 2,\ 1,\ 3$$

Comproveu que la moda val 10, la mediana val $\frac{13}{2} = 6{,}5$, la mitjana aritmètica $= \frac{149}{20} = 7{,}4$, la mitjana geomètrica val 5,3, la variança $= \frac{11219}{400} = 28$ i la desviació típica $= \frac{\sqrt{11219}}{20} = 5{,}3$.

C Progressions de nombres reals

Les progressions són un cas particular de successions de nombres reals.

C.1 Succesions

Definició C.1.1 (*Successió de nombres reals*) *Una* **successió** *de nombres reals és una aplicació*

$$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \longrightarrow f(n) = a_n \end{array}$$

Anomenem **terme general** *de la successió una expressió en funció de n que genera tots els termes de la successió i s'escriu com a a_n.*

Exemple C.1.1

El terme general $a_n = 2n+1$ dóna lloc a la successió de nombres reals

$$3, 5, 7, 9, \ldots$$

C.2 Progressions aritmètiques i geomètriques

Hi ha dos tipus interessants de progressions: les aritmètiques i les geomètriques.

Definició C.2.1 (*Progressió aritmètica*) *Una* **progressió aritmètica** *és una successió de nombres reals tal que cada terme es dedueix de l'anterior sumant una quantitat fixa d que s'anomena* diferència.

Per tant, si a_n és el terme n-èsim de la progressió i n és el nombre de termes

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

Exemple C.2.1

$$\begin{array}{ll} 2, 5, 8, 11, 14, \ldots & (d = 3) \\ 20, 18, 16, 14, 12, \ldots & (d = -2) \end{array}$$

Propietat C.2.1 *La suma de n termes consecutius d'una progressió aritmètica, essent a_1 el primer i a_n l'últim, és*

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

Exemple C.2.2

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple C.2.3 (*Interès simple*)

Suposem que s'ha deixat un capital inicial que anomenarem C_0 a un tant per cent anual R. Si anomenem $r = \frac{R}{100}$ el tant per u anual, els interessos produïts al llarg d'un any seran $C_0 r$. Suposant que els interessos no es reinverteixin (interès simple) després de n anys tindrem un capital C_n que estarà expressat per la fórmula

$$C_n = C_0(1+rn)$$

La successió dels capitals finals de cadacun dels períodes és

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n, \ldots$$

amb

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_0 + C_0 r = C_0 + d \\
C_2 &= C_1 + C_0 r = C_1 + d \\
C_3 &= C_2 + C_0 r = C_2 + d \\
&\vdots \\
C_n &= C_{n-1} + C_0 r = C_{n-1} + d
\end{aligned}$$

Per tant, aquests valors corresponen als termes d'una progressió aritmètica amb diferència $d = C_0 r$, és a dir, cada any el capital s'incrementa respecte de l'any anterior una quantitat fixa $C_0 r$.

Definició C.2.2 (*Progressió geomètrica*) *Una* **progressió geomètrica** *és una successió de nombres tal que cada terme es dedueix de l'anterior multiplicant per una quantitat fixa r que s'anomena* raó de la progressió.

Per tant, si a_n és el terme n-èsim de la progressió

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Exemple C.2.4

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \ldots \qquad (r=3)$$

$$64,\ 32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \ldots \qquad (r=\frac{1}{2})$$

Exemple C.2.5 (*Interès compost*)

Suposem que s'ha deixat un capital inicial C_0 a un tant per cent anual R. Si anomenem $r = \frac{R}{100}$ el tant per u anual i els interessos produïts a l'acabar l'any es reinverteixen al mateix tant per cent anual, la successió de capitals al cap de n anys estarà donat per la fórmula

$$C_n = C_0(1+r)^n$$

Aleshores, la successió de capitals finals de cadascun dels períodes és

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n,\ \ldots$$

amb

$$\begin{aligned}
&C_1 = C_0 + C_0 r = C_0(1+r)\\
&C_2 = C_1 + C_1 r = C_1(1+r)\\
&C_3 = C_2 + C_2 r = C_2(1+r)\\
&\vdots\\
&C_n = C_{n-1} + C_{n-1} r = C_{n-1}(1+r)
\end{aligned}$$

Per tant, aquests valors corresponen als termes d'una progressió geomètrica de raó $1+r$.

Propietat C.2.2 *La suma de n termes consecutius d'una progressió geomètrica és igual a l'últim terme multiplicat per la raó menys el primer, i tot això dividit per la raó menys 1,*

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1} \quad r \neq 1$$

Si $|r| < 1$, aleshores la suma infinita d'una progressió geomètrica val

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

Exemple C.2.6 *Calculeu la suma dels termes de la progressió*

$$3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \ldots$$

Fixem-nos que es tracta d'una progressió geomètrica de raó $\frac{1}{3}$, per tant, com que $|\frac{1}{3}| < 1$

$$S = \frac{3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2}$$

Bibliografia

[1] Adillon, R., Jorba, L. *Lecciones de Matemáticas Básicas*. Los autores (1994).

[2] Adillon, R., Jorba, L., Purroy, P. *Lecciones de Matemáticas I*. Los autores (1994).

[3] Aguiló, F., Boadas, J., Garriga, E., Villalbí, R. *Temes Clau Càlcul.* Edicions UPC (1994).

[4] Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.N., Laurentiev, M.A. *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Alianza Universidad (1985).

[5] Alsina, C., García, J., Jacas, J. *Temes Clau Geometria.* Edicions UPC (1994).

[6] Anthoine, A., Renda, V., Molina, J., & Verzeletti, G. *The "Geraci Palace" Project: Numerical Analysis and Pseudodynamic Testing*. (1996).

[7] Ausejo, E. *Historia de la ciencia y de la Técnica*. Tomo XVII Las Matemáticas del siglo XVII. Ediciones Akal (1992).

[8] Bartle, R.G., Sherbert, D.R. *Introducción al Análisis Matemático de una Variable.* Ed. Limusa (1999).

[9] Boyer, C.B. *Historia de la matemática*. Alianza Editorial. (1986).

[10] Bradley, G.L., Smith, K.J. *Student Mathematics Handbook and Integral Table for CALCULUS.* Prentice-Hall, Inc. (1995).

[11] Bradley, G.L., Smith, K.J. *Cálculo de una variable*. Prentice-Hall, Inc. (1998).

[12] Burgos, Juan de. *Cálculo infinitesimal de una variable.* McGraw-Hill. (1994).

[13] Calm, R., Coll, N., Estela, M.R. *Problemes de Càlcul*. Ed. Micromar. (1992).

[14] Cerdà, J. *Càlcul integral.* Edicions Universitat de Barcelona. (2001).

[15] Char, B.W., Geddes, K.O., Gonnet, G.H., Leong, B.L., Monagan, M.B., Watt, S.M. *Maple V. Language Reference Manual*. Springer-Verlag. (1991).

[16] Char, B.W., Geddes, K.O., Gonnet, G.H., Leong, B.L., Monagan, M.B., Watt, S.M. *Maple V. Library Reference Manual*. Springer-Verlag. (1993).

[17] Estela, M.R., Saà, J. *Cálculo con soporte interactivo en Moodle*. Prentice Hall. Pearson Educación, S.A. (2008).

[18] Estela, M.R., Serra, A. *Cálculo. Ejercicios Resueltos*. Prentice Hall. Pearson Educación, S.A. (2008).

[19] Eves, H. *An Introduction to the History of Mathematics*. The Saunders Series. Saunders College Publishing. Sixth Edition. (1992).

[20] García, I., Puig, C. *Temes Clau Àlgebra*. Edicions UPC. (1994).

[21] Giralt-Miracle, D. *Gaudí. La recerca de la forma*. Lunwerg Editores. (2002).

[22] Hütte. *Manual del ingeniero*. Editorial Gustavo Gili. (1938).

[23] Jarauta, E. *Anàlisi matemàtica d'una variable. Fonaments i aplicacions* Edicions UPC. (2002).

[24] Kline, M. *Mathematical thought from ancient to modern times* Oxford Univ.Press, Nueva York. (1972).

[25] Larson, R.E., Hostetler, R.P. *Cálculo y Geometría Analítica*. McGraw-Hill. (1989).

[26] Muñoz, M.C., Román, N. *Origen y desarrollo histórico del cálculo infinitesimal*. Edicions Virtuals UPC. (1999).

[27] Noguera, M., Grau, M. *Anàlisi matemàtica. Pràctiques amb MAPLE V*. Edicions UPC. (1996).

[28] Ortega, J.M. *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica*. Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona. (1990).

[29] Sainz, M.A., Serarols, J. Ll., Pérez, A.M. *Álgebra*. Los autores. (1994).

[30] Simmons, G.F. *Cálculo y Geometría Analítica*. McGraw-Hill. (2002).

[31] Spiegel, M.R., Abellanas, L. *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*. Ed. McGraw-Hill. (1991).

[32] Spivak, M. *Calculus*. Ed. Reverté, S.A. (1995).

[33] Xambó, S. *Geometria*. Edicions UPC. (1997).

[34] Xambó, S., Eixarch, R., and Marquès, D. *WIRIS: an Internet platform for the teaching and learning of mathematics in large educational communities*. CONTRIBUTIONS to SCIENCE, 2 (2): 269-276. (2002). Institut d'Estudis Catalans